序　　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军，文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适当新时期的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《有限数学引论》、《初等微分几何》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系、复旦大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

在我们生活的世界中，存在着各种各样的光滑曲线和曲面，如：飞机、轮船、汽车、齿轮、凸轮、机耕犁面、薄壳屋顶，等等．为了设计和制造这些外形复杂的产品，就需要掌握这类曲线和曲面的几何性质．以微积分为工具来研究光滑曲线和曲面的局部几何性质的数学分科，就是微分几何．

本书包括空间曲线论和曲面论两章，在这里讨论的都是曲线和曲面的局部性质．最后安排一节附录：卵形线，则是讨论平面上一类凸闭曲线的整体性质．对于初学的读者来说，附录和打有*号的各段，不妨略而不读．另外，对第一章第七节特殊空间曲线和第二章第八节特殊曲面两节，也可暂且不学，这不会影响到整个课程的完整性．

既然是自学教材，总是希望无师自通．因此，我们在内容的编排上，突出微分几何的基本知识和基本方法，并且力求简明直观，通俗易懂．为此，编写了较多的例题和习题，它们大多是初浅的，但又是重要的．

本书的另一特点是重视微分几何在工程技术中的应用．我们从大量的实际应用中采用了许多实例，其中一些例子就是作者几年来从事微分几何应用研究成果的剪辑．希望读者通过自学，不但能掌握微分几何的基本知识和基本方法，而且培养一些自己动手、解决实际问题的能力．

本书可供青年读者和工程技术人员自学参考之用．也可

作为工科院校有关专业，包括航空、造船、汽车、机械等专业的计算机辅助设计和辅助制造(CAD & CAM)课程的基础教材或参考书.

苏步青　刘鼎元

于复旦大学

1983年10月

目　　录

第二章 曲 面 论

附录 卵 形 线

习 题 答 案

第一章

空间曲线论

我们所接触到的空间，大至宇宙，小至细胞，其中都充满着五光十色、变幻纷杂的曲线. 诸如太阳系行星的轨道，飞机的航道，盘山蜿蜒的公路，沙发里的弹簧，织物图案花纹，齿轮和凸轮的轮廓，生命遗传物质 DNA 的双螺旋结构，等等.

在人们接触到的曲线中，最简单的要算是直线和圆了. 这些曲线是初等平面几何中讨论的对象. 其次较为复杂的曲线是二次曲线，即椭圆、双曲线和抛物线. 这些已经在平面解析几何里学习过，讨论的方法是用坐标和一元二次代数方程.

对于更复杂的曲线，仅仅用初等代数一般是不能解决问题的. 研究更加一般的光滑曲线的几何性质，微积分则是有力的工具. 在这一章里，我们就用微积分来推导三个刻划一条空间曲线几何性质的基本几何量，就是弧长、曲率和挠率. 然后运用曲线上的活动标架作为基本图形，对几种典型的空间曲线和平面曲线进行讨论.

因篇幅所限，本书仅仅介绍曲线的局部性质. 从一条曲线的局部性质如何推导其整条曲线的性质，这方面的研究即所谓整体理论，则是近代发展起来的，由于自学读者还缺乏许多基础知识，这里就一概从略.

第一节 空间曲线的表示式

1.1 参数方程

在微积分课程里，我们用函数

$$y=f(x)$$

表示一条平面上的曲线，这里(x, y)是一点的直角坐标．这种表示式具有形式简单、计算便利等优点，但不宜于研究曲线自身的几何性质．这是因为它有三个缺点：第一，方程的形状关于x、y不对称；第二，在切线平行于y轴的点，导数$\frac{dy}{dx}$变为无穷大；第三，当平行于y轴的直线和所论的曲线相交于两点以上时，$f(x)$成为多值函数．

另外一种表示平面曲线的方法，是用形如

$$F(x, y)=0$$

的隐函数方程．如同上一种表示式一样，这种形式过份地依赖于坐标系的选择．就是说：用一套坐标系，就有一套函数的表示，但是曲线的几何性质根本不依赖于坐标系的选择，这就是缺陷．

同样，一条空间曲线的表示式是

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=g(x) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0. \end{cases}$$

每一组方程都是把一条空间曲线作为两个曲面的交线，前者特别看作两个柱面的交线而表成的．用这些表示式研究空间曲线，势必引起形式不对称和计算烦琐等缺点．

为了避免这些缺点，我们经常采用参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

表示一条空间曲线，其中(x,y,z)表示曲线上一点在右手系直角坐标系下的坐标，其中 t 是参数.

如果把 t 看成时间，那末所论的曲线可以看成是空间质点从时刻 a 到 b 之间的运动轨迹．不过，一般说来，t 不具有时间这个物理意义，而且它的选择不是唯一的．例如，对于参数变换 $t=au+b$（a、b 是常数），方程(1.1)的各函数将改变形式，而曲线本身形状并不改变.

读者已经在解析几何课程中学过平面曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\quad(a\leqslant t\leqslant b),\tag{1.2}$$

现在仅举复习用的几个例子如下：

【例 1】 圆（如图 1-1）

取中心在坐标原点，半径为 a 的圆有如下三种表示的方程：

(1) 显函数表示

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leqslant x\leqslant a)\quad\text{上半圆；}$$

$$y=-\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leqslant x\leqslant a)\quad\text{下半圆.}$$

(2) 隐函数表示

$$x^2+y^2=a^2.$$

(3) 参数表示

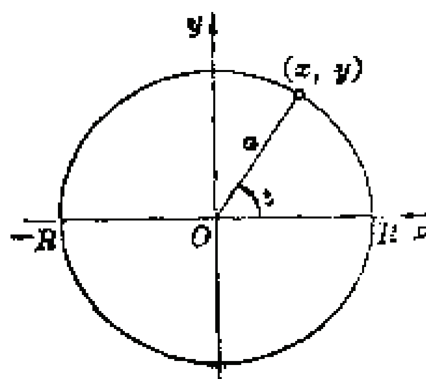


图 1-1

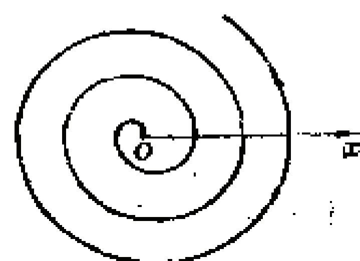


图 1-2

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

【例 2】 阿基米德螺线(如图 1-2)

设(r, θ)为一点的极坐标．由方程

$$r = a\theta \quad (0 \leqslant \theta < +\infty,\ a \text{ 是常数})$$

表示的曲线叫做阿基米德螺线．

阿基米德螺线在直角坐标系下的方程是

$$\begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = a\theta\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta < +\infty).$$

【例 3】 直线(如图 1-3)

设空间一条直线过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，它的方向为 $\boldsymbol{a}(l, m, n)$．这条直线的参数方程是

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

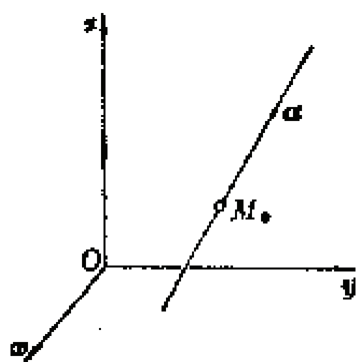


图 1-3

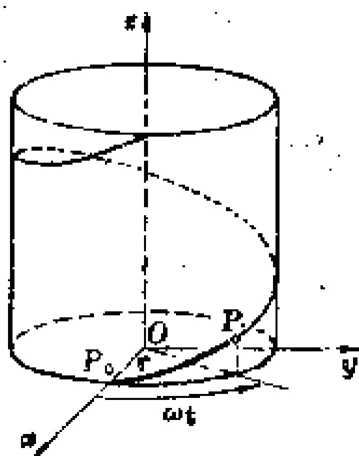


图 1-4

【例 4】 圆柱螺线(如图 1-4)

当空间一动点绕 z 轴作等速旋转，并沿 z 轴方向作等速移动时，它所画成的轨迹就是圆柱螺线．为了写出它的参数

方程，设 ω 为动点 P 绕 z 轴的旋转速度(常数)，r 为圆柱的半径，p 为 P 沿 z 轴的运动速度，则动点 P 从点 $P_0(r, 0, 0)$ 出发，经过时间 t 后的位置坐标 x, y, z 可以表成

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \quad (-\infty < t < +\infty). \\ z = pt \end{cases}$$

从此消去参数 t，便得到这曲线的隐函数表示：

$$\begin{cases} x = r\cos\dfrac{z}{p} \\ y = r\sin\dfrac{z}{p} \end{cases} \quad (-\infty < z < +\infty).$$

1.2 向量方程

设右手直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标基向量是 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. 我们可把曲线的参数方程(1.1)写成向量方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1.3}$$

式中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

代表曲线上点的位置向量.

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

称为关于变量 t 的向量函数. 上式常常简写成下述分量表示式：

$$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\}. \tag{1.6}$$

事实上，我们可以把向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 看成三个独立的有序数量函数的缩写.

对于落在 xy 平面上的平面曲线，(1.6)式成为

$$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t),\ y(t)\}.$$

【例】 证明向量方程

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+b\sin t\boldsymbol{j}$$

表示椭圆(如图 1-5).

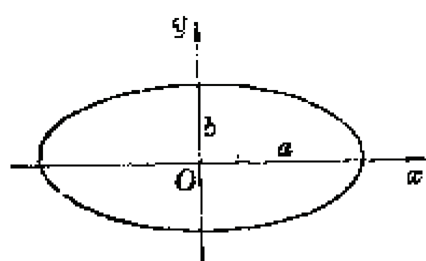


图 1-5

因为此时

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,$$

所以消去 t 的结果是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

习 题 一

1. 试写出下列平面曲线的一种参数方程:

(1) $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$;

(2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$;

(3) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$;

(4) $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

2. 把下列平面曲线的参数方程化为隐函数方程, 并说明是什么曲线:

(1) $\begin{cases}x=t-1\\ y=t^2-2t+1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=3-2t\\ y=1+\frac{2}{t};\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=a\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ y=2b\frac{t}{1+t^2};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=x_0+a\sec t\\ y=y_0+b\,\mathrm{tg}\,t.\end{cases}$

3. 把下列平面曲线的极坐标方程化为参数方程(a、k 为常数):

(1) 对数螺线　$r=ae^{k\theta}$;

(2) 双曲螺线　$r=\frac{a}{\theta}$;

(3) 尼可米德蚌线　$r=\frac{a}{\cos\theta}+k$.

4. 写出下列空间曲线的一种参数方程:

(1) 圆柱面与平面的截线

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1; \end{cases}$$

(2) 圆柱面与球面的交线

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$$

5. 证明:

$$\boldsymbol{r}=at\boldsymbol{i}+bt\boldsymbol{j} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

是直线.

6. 证明:

(1) $\boldsymbol{r}=at^2\boldsymbol{i}+bt\boldsymbol{j} \quad (-\infty<t<+\infty)$

表示一条抛物线;

(2) $\boldsymbol{r}=a\operatorname{ch}t\boldsymbol{i}+b\operatorname{sh}t\boldsymbol{j} \quad (-\infty<t<+\infty)$

表示一条双曲线, 式中

$$\operatorname{ch}t=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}), \quad \operatorname{sh}t=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$$

代表双曲函数.

第二节　向 量 函 数

向量函数的代数运算和分析运算是微分几何的基本工具之一. 我们在本节先简单复习一下向量的代数运算, 然后对向量函数引进微分和积分的概念以及它们的运算法则.

2.1　向量代数

我们在空间采用右手系直角坐标系 $Oxyz$. 设单位坐标基向量为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 那末, 对于空间任一点 $M(x, y, z)$ 就有对应的向量

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

称为 M 的位置向量(向径). 反过来, 已知一个位置向量 $\boldsymbol{r}$ 时, 便得到它的终点 $M(x, y, z)$ 与之对应. 这样, 我们就在点与向量之间建立了一一的对应. 在这个意义下, 我们今后可以把点 $M(x, y, z)$ 和对应的位置向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 等同起来,不加区别. 向量 $\boldsymbol{r}$ 也可简写成

$$\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}.$$

一般地说, 向量的起点 P 不一定是坐标原点. 这时, 向量 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PM}$ 的定义如下:

$$\boldsymbol{v}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k},$$

或写成 $$\boldsymbol{v}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\},$$

式中 (x_0, y_0, z_0) 是 P 点的坐标.

我们称普通的实数或复数为数量, 用以区别向量. 称 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 为向量 $\boldsymbol{v}$ 的分量,它们都是数量.特别是,位置向量 $\boldsymbol{r}$ 的分量是终点 M 的坐标 x, y, z.

在解析几何课程中, 读者已经熟悉了有关向量的各种代数运算. 在这里,作为复习,我们不加证明地列出其中最主要的一些事实:

设 λ、μ 为实数,

$$\boldsymbol{r}=\{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\{x_i, y_i, z_i\} \quad (i=1, 2, 3).$$

1. 向量的长度和二向量的夹角

① 定义向量 $\boldsymbol{r}$ 的长度为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

② 设非零的二向量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 间的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, 则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_2|}.$$

因此，二向量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 垂直的条件是

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=0.$$

③ 三个分量都是 0 的向量称为零向量，并记作 $\mathbf{0}$ 或单作 0. 因此，$\boldsymbol{r}$ 为零向量的条件是

$$|\boldsymbol{r}|=0.$$

④ 长度为 1 的向量称为单位向量. 若 $|\boldsymbol{r}|\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

是和 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量.

2. 向量的代数运算中的各种定义

① 二向量之和

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\{x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2\}.$$

② 一个向量与数量的数乘向量

$$\lambda\boldsymbol{r}=\{\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z\}.$$

③ 二向量的数积(内积)

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

④ 二向量的向量积(外积)

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

它是同时垂直于 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的一个向量，且 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ 三向量构成右手系. 从此得知，二向量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 平行的条件为

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=0.$$

3. 运算法则

从上述定义易证下列法则成立：

① 结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{r})=(\lambda\mu)\boldsymbol{r},$$

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)+\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1+(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3),$$
$$(\lambda\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{r}_2=\lambda(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2),$$
$$(\lambda\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{r}_2=\lambda(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2).$$

② 分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r},$$
$$\lambda(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)=\lambda\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2,$$
$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3,$$
$$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3.$$

③ 交换律

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1,$$
$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1,$$
$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1\quad\text{(反交换律)}.$$

4．混合积和双重向量积

① 混合积

$$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix},$$

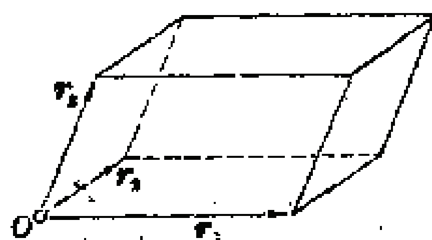


图 1-6

右边行列式表示以 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ 为三条棱的平行六面体的有向体积(图1-6)，即这行列式的绝对值是其体积，它的符号决定于三向量的旋向：

$$\text{当}\quad\begin{matrix}\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3\text{成右手系},\\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3\text{共面},\\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3\text{成左手系},\end{matrix}\qquad(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)\begin{cases}>0\\ =0\\ <0.\end{cases}$$

从行列式的性质得到：

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_4)+(\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_4),$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)&=(\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_1)=(\boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)\\&=-(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_2)=-(\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_3)\\&=-(\boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_1).\end{aligned}$$

② 双重向量积法则

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1,$$

它是向量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的线性组合.

③ 拉格朗日恒等式

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4\\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4\end{vmatrix}.$$

特别，当 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_4$ 时，上式成为

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)^2=\boldsymbol{r}_1^2\boldsymbol{r}_2^2-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)^2.$$

习　题　二

1. 试证:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$;

(2) $(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$;

(3) $(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_2)$

$=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2)-(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2)$;

(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})^2$;

(5) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$;

(6) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$;

(7) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 试证:

$$\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=|\boldsymbol{a}|^4\boldsymbol{b}.$$

3. 设
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$
证明三向量 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ 是共平面的.

*4. 证明

$$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2.$$

2.2 向量函数的极限

1. 向量函数

设一个向量 $\boldsymbol{r}$ 的三个分量都是 t 的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}\quad (a\leqslant t\leqslant b),$$

那末，称它为向量函数，并记作 $\boldsymbol{r}(t)$.

特别是当 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 t 无关时，则称为常向量.

2. 极限

设 $\boldsymbol{r}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$ 是常向量，而且

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|=0,$$

那末，我们说：当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{r}(t)$ 趋于极限 $\boldsymbol{r}_0$，并且记为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0. \tag{2.1}$$

从定义

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|$$
$$=\sqrt{[x(t)-x_0]^2+[y(t)-y_0]^2+[z(t)-z_0]^2}$$

容易看出，条件(2.1)不外乎是

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\quad \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0. \tag{2.2}$$

因此，(2.1)式也可以写成

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\{\lim_{t\to t_0}x(t),\ \lim_{t\to t_0}y(t),\ \lim_{t\to t_0}z(t)\}. \tag{2.3}$$

这说明，向量函数趋于极限 $\boldsymbol{r}_0$，同它的每个分量函数趋于极限的相应分量是等价的. 所以，对向量函数的极限的研究，可以简单地转化为对它的每个分量函数的极限的研究. 按照这种事实，我们不难证明极限运算有关的性质如下：

① $\lim\limits_{t\to t_0}[\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t);$ (2.4)

② $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t);$ (2.5)

③ $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$； (2.6)

④ $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$. (2.7)

在这里，我们仅对性质①给以证明，其余的留给读者作为练习之用.

(1) 直接从定义出发：

记 $\lambda_0=\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t),\quad \boldsymbol{r}_0=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$,

则
$$\begin{aligned}&|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-\lambda_0\boldsymbol{r}_0|\\&=|(\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-\lambda(t)\boldsymbol{r}_0)+(\lambda(t)\boldsymbol{r}_0-\lambda_0\boldsymbol{r}_0)|\\&\leqslant|\lambda(t)|\cdot|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|+|\lambda(t)-\lambda_0|\cdot|\boldsymbol{r}_0|.\end{aligned}$$

当 $t\to t_0$ 时，我们有

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|\to 0,\quad |\lambda(t)-\lambda_0|\to 0,$$

$|\lambda(t)|$ 在 t_0 的邻域里是有界的. 因而

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-\lambda_0\boldsymbol{r}_0|\to 0,$$

即
$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)=\lambda_0\boldsymbol{r}_0.$$

(2) 第二种证法：向量函数的极限可以化为各分量的极限，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to t_0}[\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)]\\&=\lim_{t\to t_0}\{\lambda(t)x(t),\ \lambda(t)y(t),\ \lambda(t)z(t)\}\\&=\{\lim_{t\to t_0}[\lambda(t)x(t)],\ \lim_{t\to t_0}[\lambda(t)y(t)],\ \lim_{t\to t_0}[\lambda(t)z(t)]\}\\&=\{\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}x(t),\ \lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}y(t),\\&\qquad\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}z(t)\}\\&=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\{\lim_{t\to t_0}x(t),\ \lim_{t\to t_0}y(t),\ \lim_{t\to t_0}z(t)\}\\&=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t).\end{aligned}$$

3. 连续性

若(2.1)式中的极限

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)=\{x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0)\},$$

则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 连续. 从(2.2)看出,向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 连续,等价于它的每个分量函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 都在 t_0 连续.

利用上述四条极限运算性质, 我们立即看出: 当数量函数 $\lambda(t)$ 和向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2(t)$ 都在 t_0 连续时, 则向量函数 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)$, $\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)$ 和数量函数 $\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)$ 也都在 t_0 连续.

如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $(a,\ b)$ 中每一点连续, 则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $(a,\ b)$ 连续. 以 $\boldsymbol{r}(t)$ 作为动点 $P(t)$ 的位置向量时, $P(t)$ 的轨迹称为连续曲线.

2.3 向量函数的微分

1. 向量的导数

若极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\quad (t_0\in(a,\ b))$$

存在,则称向量函数在 t_0 可微. 这个极限叫做 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 的导数, 也称导向量(注意: 向量函数的"导数"不是数量, 而是向量), 记为 $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ 或 $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}$:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}. \qquad (2.8)$$

从极限的定义(2.1)和它的等价条件(2.2)看出:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\{\dot{x}(t_0),\ \dot{y}(t_0),\ \dot{z}(t_0)\}, \qquad (2.9)$$

式中 $\dot{x}(t_0)=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}$, 等等.

若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 (a, b) 中每一点都可微，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 (a,b) 可微。

作为练习，请读者自己验证下列求导公式。这些方法可以直接从定义证明，也可以分解成向量的导数来证明。今后，在不致混淆的情况下，把 $\boldsymbol{r}(t)$ 记为 $\boldsymbol{r}$。

① $\dfrac{d}{dt}(\lambda\boldsymbol{r})=\dfrac{d\lambda}{dt}\boldsymbol{r}+\lambda\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$;

② $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)=\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$;

③ $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)=\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$;

④ $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\dfrac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$;

⑤ $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)$

$$=\left(\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt},\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3\right)+\left(\boldsymbol{r}_1,\ \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt},\ \boldsymbol{r}_3\right)$$

$$+\left(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \frac{d\boldsymbol{r}_3}{dt}\right);$$

⑥ 复合向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $t=t(u)$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{du}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{du}.$$

这些公式的表示形式和证明方法同微积分中关于数量函数的相应公式相同。但是需要注意：向量积同向量的次序有关，因此上述公式 ④ 和 ⑤ 中的次序不能随意交换。

2. 向量的微分

向量
$$d\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)dt$$
称为向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的微分。从微积分得知

$$d\boldsymbol{r}=\{dx,\ dy,\ dz\}.$$

3. 高阶导函数

向量函数 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 的导数叫做向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的二阶导函数，记作 $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$. 更高阶的导函数依此类推. 我们有

$$\overset{(n)}{\boldsymbol{r}}(t)=\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t),\ z^{(n)}(t)\}.$$

若向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有一直到 n 阶的连续导函数 $\overset{(n)}{\boldsymbol{r}}(t)$，我们就称 $\boldsymbol{r}(t)$ 为 C^n 阶向量函数，记作 $\boldsymbol{r}(t)\in C^n$. 容易看出，向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\in C^n$ 的条件就是它的每一个分量 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)\in C^n$，也就是 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 具有直到 n 阶的连续导函数. 特别是，当 $n=0$ 时，$\boldsymbol{r}(t)$ 是连续的向量函数.

微分几何中研究的向量函数，一般是被假定为在所需要的阶数内是可微的. 这是为了要讨论图形的更多的几何性质.

4. 向量函数的展开

当向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\in C^n$ 时，它可以展开为下列形式：

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\dot{\boldsymbol{r}}(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(t)(\Delta t)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\overset{(n)}{\boldsymbol{r}}(t)(\Delta t)^n+\boldsymbol{\varepsilon}_n(t,\ \Delta t)(\Delta t)^n,$$

其中

$$\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}_n(t,\ \Delta t)=0.$$

为了阐明这一事实，只要对向量函数

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

的每一个分量按泰勒公式展开为

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\dot{x}(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{x}(t)(\Delta t)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\overset{(n)}{x}(t_1)(\Delta t)^n,$$

$$y(t+\Delta t)=y(t)+\dot{y}(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{y}(t)(\Delta t)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\overset{(n)}{y}(t_2)(\Delta t)^n,$$

$$z(t+\Delta t)=z(t)+\dot{z}(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{z}(t)(\Delta t)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\overset{(n)}{z}(t_3)(\Delta t)^n,$$

其中 t_1, t_2, t_3 是三个在 t 与 $t+\Delta t$ 之间的值，t 看成固定值．从此得出

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\dot{\boldsymbol{r}}(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(t)(\Delta t)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\boldsymbol{R}_n(\Delta t)^n,$$

式中已令 $\boldsymbol{R}_n=\overset{(n)}{x}(t_1)\boldsymbol{i}+\overset{(n)}{y}(t_2)\boldsymbol{j}+\overset{(n)}{z}(t_3)\boldsymbol{k}$.

然而，$\boldsymbol{r}(t)\in C^n$，$\overset{(n)}{x}(t)$、$\overset{(n)}{y}(t)$、$\overset{(n)}{z}(t)$ 都是 t 的连续函数，而 t_1、t_2、t_3 都在 t 与 $t+\Delta t$ 之间，所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}_n&=\lim_{\Delta t\to 0}\overset{(n)}{x}(t_1)\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\overset{(n)}{y}(t_2)\boldsymbol{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\overset{(n)}{z}(t_3)\boldsymbol{k}\\&=\overset{(n)}{x}(t)\boldsymbol{i}+\overset{(n)}{y}(t)\boldsymbol{j}+\overset{(n)}{z}(t)\boldsymbol{k}\\&=\overset{(n)}{\boldsymbol{r}}(t).\end{aligned}$$

因此，把上式中的 $\boldsymbol{R}_n$ 写成

$$\boldsymbol{R}_n=\overset{(n)}{\boldsymbol{r}}(t)+n!\boldsymbol{\varepsilon}_n(t,\ \Delta t),$$

便导出所要证明的展开式．

注意：$\boldsymbol{R}_n$ 一般不能写成 $\overset{(n)}{\boldsymbol{r}}(\theta)\ (t\leqslant\theta\leqslant t+\Delta t)$ 的样式，这是因为 $\boldsymbol{R}_n$ 的三个分量分别取值于 t_1、t_2、t_3，而它们一般是不相等的．这一点同数量函数的泰勒公式不一样．

2.4 向量函数的积分

对于给定的向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，若存在向量函数 $\boldsymbol{R}(t)$，它的导函数

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\boldsymbol{r}(t),$$

则称 $\boldsymbol{R}(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个原函数．同数量函数一样，若 $\boldsymbol{R}(t)$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个原函数，则任何的原函数同 $\boldsymbol{R}(t)$ 只差一个常向量 $\boldsymbol{C}$．$\boldsymbol{r}(t)$ 的全体原函数 $\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的不定积分，记成

$$\int \boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{C}.$$

$\boldsymbol{C}$ 也叫做积分常向量．

作为练习，读者试自行证明下列不定积分运算规律：

① $\int \boldsymbol{r}(t)dt=\left\{\int x(t)dt,\ \int y(t)dt,\ \int z(t)dt\right\}$；

② $\int \lambda\boldsymbol{r}(t)dt=\lambda\int \boldsymbol{r}(t)dt$；

③ $\int [\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]dt=\int \boldsymbol{r}_1(t)dt+\int \boldsymbol{r}_2(t)dt$；

④ $\int \boldsymbol{a}\varphi(t)dt=\boldsymbol{a}\int \varphi(t)dt$；

⑤ $\int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{r}(t)dt$；

⑥ $\int \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{a}\times\int \boldsymbol{r}(t)dt$；

式中 λ 为常数，$\boldsymbol{a}$ 为常向量．

同样，我们可以定义向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的定积分：

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\left\{\int_a^b x(t)dt,\ \int_a^b y(t)dt,\ \int_a^b z(t)dt\right\}.$$

设 $\boldsymbol{R}(t)$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一个原函数，便有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a).$$

2.5 向量微分方程

在本节，我们将通过上述的积分公式，叙述一些微分几何中常见的向量常微分方程的解法．这些典型的例子本身在后面的内容中也是有用的．

【例 1】 已知常向量 $\boldsymbol{a}$，求解向量微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{a}t.$$

解：设

$$\boldsymbol{r} = \{x_1,\ x_2,\ x_3\},\quad \boldsymbol{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}.$$

我们有

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i t\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

积分后，得

$$x_i = \frac{1}{2} a_i t^2 + C_i\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

式中 $C_i (i=1,\ 2,\ 3)$ 是三个积分常数．把上式写成向量形式，得到解

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 + \boldsymbol{C},$$

式中积分常向量

$$\boldsymbol{C} = \{c_1,\ c_2,\ c_3\},$$

它决定于初始条件．例如，当已知初始位置为 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$ 时，便得到 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}_0$.

如果我们运用前述的不定积分运算公式，从原向量微分方程立刻可以写出

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{C},$$

这里 $\boldsymbol{C}$ 是积分常向量.

【例 2】 设 ω 是已知常数, 求解二阶向量微分方程

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\omega^2\boldsymbol{r}.$$

解: 设 $\boldsymbol{r}=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, 并把上列方程写为

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=-\omega^2x_i \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

它的一般解是

$$x_i=A_i\cos\omega t+B_i\sin\omega t \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

或写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\cos\omega t+\boldsymbol{B}\sin\omega t,$$

式中已令

$$\boldsymbol{A}=\{A_1,\ A_2,\ A_3\},$$
$$\boldsymbol{B}=\{B_1,\ B_2,\ B_3\}.$$

两个积分常向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 决定于两个初始条件. 例如, 设

$$\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}_0,\quad \dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{v}_0.$$

从上列的一般解得出

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}_0,\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{v}_0.$$

【例 3】 求解向量微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}=\boldsymbol{e}_2\\[2mm]\dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{dt}=-\boldsymbol{e}_1.\end{cases}$$

解: 对第一方程的两边关于 t 求导数, 然后以第二式代入, 便得到

$$\frac{d^2\boldsymbol{e}_1}{dt^2}=-\boldsymbol{e}_1$$

由例 1 的结果，上述方程的解是

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{A}\cos t+\boldsymbol{B}\sin t.$$

再代入第一方程的左端，我们得到

$$\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{A}\sin t+\boldsymbol{B}\cos t.$$

通过以上三个例子的介绍，读者会发现：向量微分方程与数量微分方程的求解方法极为相似，前者只不过是后者按照分量次序的简单组合罢了。

2.6 特殊向量函数

本节中，我们将介绍三种特殊的向量函数，为后文中的运用作好准备。在这里及下文中，除了特别声明外，我们约定一切的向量函数都具有足够高阶的导函数。

1．定长向量函数

当向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的长度一定时，叫做**定长向量函数**。这时

$$\boldsymbol{r}^2(t)=|\boldsymbol{r}(t)|^2=\text{常数}.$$

关于 t 微分两边，得

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0.$$

反之，若这条件成立，便有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2)=0,$$

即 $\boldsymbol{r}^2(t)=$常数，从而 $|\boldsymbol{r}(t)|=$常数．这表明：二向量 $\boldsymbol{r}$、$\dot{\boldsymbol{r}}$ 互相垂直．

2．定向向量函数

同一个定方向平行的所有向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 叫做**定向向量函数**．特别是，关于位置向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，则称为共线．

我们在这个定方向上取一个单位向量 $\boldsymbol{e}$，则相应的定向

向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 可以表为

$$\boldsymbol{v}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e},$$

式中 $\lambda(t)\neq 0$ 是 t 的数量函数，而且除了符号外，等于 $\boldsymbol{v}(t)$ 的长度.

关于 t 微分上式两边，得

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\dot{\lambda}(t)\boldsymbol{e}$$

因此有
$$\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}=0.$$

反之，假如这关系对于一个非零向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 成立，我们将证明 $\boldsymbol{v}(t)$ 是定向向量函数.

这是因为这时有

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\dot{\rho}(t)\boldsymbol{v}(t),$$

式中 $\dot{\rho}(t)$ 是数量函数. 积分后，得

$$\boldsymbol{v}(t)=e^{\rho(t)}\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是积分常向量.

3. 与一定向垂直的向量函数

设向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 和一个定向 $\boldsymbol{a}$ 垂直，

$$\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

特别是，当 $\boldsymbol{v}(t)$ 是位置向量函数时，则称为共面.

对上式连续求导两次，并注意 $\boldsymbol{a}$ 是常向量，得到

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)\cdot\boldsymbol{a}=0,\quad \ddot{\boldsymbol{v}}(t)\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

上述三式表明三个向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$、$\dot{\boldsymbol{v}}(t)$、$\ddot{\boldsymbol{v}}(t)$ 垂直于同一个常向量 $\boldsymbol{a}$，所以混合积对于所有的 t，

$$(\boldsymbol{v}(t),\ \dot{\boldsymbol{v}}(t),\ \ddot{\boldsymbol{v}}(t))=0.$$

反过来，假定这条件成立. 我们不妨假定 $\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}\neq 0$，否则，从 2 得知，$\boldsymbol{v}(t)$ 是定向向量函数，也就和定向垂直. 这时，$\boldsymbol{v}$ 与 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 不平行，$\ddot{\boldsymbol{v}}$ 可以表成它们的线性组合：

$$\ddot{\boldsymbol{v}}=\lambda\dot{\boldsymbol{v}}+\mu\boldsymbol{v},$$

式中 λ 和 μ 是两个数量函数.

现在记
$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}},$$
它是非零向量函数,而且上列条件可以表成
$$\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{n}(t)=0.$$

另一方面,从 $\boldsymbol{n}$ 的定义得
$$\dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{v}\times\ddot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}\times(\lambda\dot{\boldsymbol{v}}+\mu\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}=\lambda\boldsymbol{n},$$
因此 $\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{n}}=0$. 根据 2, $\boldsymbol{n}(t)$ 是定向向量函数. 这样,我们证明了 $\boldsymbol{v}(t)$ 和一个定向相垂直.

特别是,我们得到结论:

位置向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 为共面的充要条件是
$$(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}})=0.$$

对上面三种特殊的向量函数,我们分别找到了它们的判别条件,列成表格如下:

几　何　意　义	向 量 微 分 条 件
定长向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$	$\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}=0$
定向向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$	$\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}=0$
和一定向垂直的向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$	$(\boldsymbol{v},\ \dot{\boldsymbol{v}},\ \ddot{\boldsymbol{v}})=0$

上表列的三项判别条件,在以后的课程中经常要用于位置向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的场合.

需要指出:除了判别条件本身外,我们在这一节还介绍了一种方法,就是:利用向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 及其导数所满足的代数关系,来判别向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 所具备的几何性质:定长、定向(或共线)、与一定向垂直(或共面).这样一来,研究图形的几何性质便转化为一个研究向量及其微分关系的问题.例如,直接判断 $\boldsymbol{r}(t)$ 是否共面向量函数,是比较麻烦的事,而计算混合积 $(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}})$ 并估计它是否等于零,却容易得多(见习

题三第11、12题).

从以上的讨论也可看出：解析几何同微分几何是用着怎样不同的工具：解析几何是把图形转换成动点坐标(x, y, z)的代数方程；而微分几何则是把图形转化成位置向量$\boldsymbol{r}(t)$及其导数的关系．由于运用了微积分这一工具，我们对曲线和曲面的局部性质可以进行更细致的研究了．

习 题 三

1．证明本节中向量函数的极限公式．

2．证明本节中向量函数的求导公式．

3．证明本节中向量函数的积分公式．

4．求证：$\boldsymbol{a}(t)$是常向量的充要条件为$\dot{\boldsymbol{a}}(t)=0$．

5．设λ_0是常数，$\boldsymbol{v}_0$是常向量，试证：

(1) $\dfrac{d}{dt}(\lambda_0\boldsymbol{v})=\lambda_0\dot{\boldsymbol{v}}$；　　(2) $\dfrac{d}{dt}(\lambda\boldsymbol{v}_0)=\dot{\lambda}\boldsymbol{v}_0$；

(3) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_0\cdot\dot{\boldsymbol{v}}$；　　(4) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_0\times\dot{\boldsymbol{v}}$．

6．下列各式成立吗？为什么？

(1) $\boldsymbol{v}^2=|\boldsymbol{v}|^2$；　　(2) $\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|=\dfrac{d}{dt}|\boldsymbol{v}|$；

(3) $\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=|\boldsymbol{v}|\dfrac{d|\boldsymbol{v}|}{dt}$．

7．先判别下列各式中哪些是数量函数，哪些是向量函数，再求其导数：

(1) $[\boldsymbol{r}(t)]^2$；　　(2) $[\dot{\boldsymbol{r}}(t)]^2$；

(3) $\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$；　　(4) $(\dot{\boldsymbol{r}}(t), \ddot{\boldsymbol{r}}(t), \dddot{\boldsymbol{r}}(t))$；

(5) $[\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)]\times\dddot{\boldsymbol{r}}(t)$；　　(6) $|\boldsymbol{r}(t)|$；

(7) $|\boldsymbol{r}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)|$．

8．证明：若向量函数$\boldsymbol{v}(t)$在$t=t_0$处连续，且$\boldsymbol{v}(t_0)\neq 0$，则存在包含$t_0$的一个开区间，使得当$t$属于这个开区间时，$\boldsymbol{v}(t)\neq 0$．

9．求向量函数$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(t^2+2t+1)\boldsymbol{j}$在$t=0$处的泰勒公式的前三项．

10. 设向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 满足 $\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}=0$, $\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}=0$, 求证 $\boldsymbol{v}(t)$ 为常向量.

11. 证明: $\boldsymbol{r}(t)=\{2t-1,\ t^2-2,\ -t^2+4t\}$ 为共面向量函数.

12. 证明: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}t^3+\boldsymbol{b}t^2+\boldsymbol{c}t$ 为共面向量函数的充要条件是

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=0.$$

13. 求解位置向量的微分方程:

(1) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\{3t^2-1,\ 2t^3,\ -\sin t\}$;

(2) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=a\boldsymbol{r}$ (a 是常数);

(3) $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}$ (式中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是常向量);

(4) $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}+a\boldsymbol{r}=0$ (式中 a 是常数), 对 $a\gtreqless 0$ 三种情形分别加以讨论.

14. 求解向量微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}=k\boldsymbol{e}_2\\[2mm]\dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{dt}=-k\boldsymbol{e}_1,\end{cases}$$

式中 k 为正常数.

2.7 小结

本节首先复习了向量的各种代数运算, 包括运算的定义和运算的法则. 然后引入向量函数的概念以及它的微分和积分. 本节的重点是向量函数的微分, 相对说来向量函数的积分较少使用.

微分几何研究的几何对象是曲线和曲面, 它们都是用向量函数来表示的. 因此, 向量函数, 尤其是位置向量函数的微分, 在本课程中就象初等代数的四则运算一样, 被反复使用. 2.3 节中的六条求导公式是常常用到的, 读者务必通过练习来掌握这一技巧.

第三节　空间曲线的弧长、曲率、挠率

我们要在前两节的基础上讨论空间曲线或挠曲线的基本性质，而首先是通过三个元素，即弧长、曲率和挠率来刻划的，分别叙述如下。

3.1　弧长

设一条空间曲线决定于参数方程

$$C:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}\quad (a\leqslant t\leqslant b), \tag{3.1}$$

式中各函数具有直至三阶的连续导数，即 $\boldsymbol{r}(t)\in C^3$。尽管在某些场合并不一定需要这么多的条件，但为方便起见，不再一一细分。

设 $\boldsymbol{r}(t_0)$是曲线 C 上的任意点，简称 t_0 点。$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$是它的邻点。这两点决定一个向量，即：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)\quad (\Delta t>0).$$

除以 Δt，便得到方向相同而长度不同的向量。当 $\Delta t\to 0$ 时，从曲线 C 的连续性得知 $\Delta\boldsymbol{r}\to 0$，而且

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

是曲线 C 在 t_0 点的一个切线向量，简称切向量(图 1-7)。

当 t 变动时，所论的曲线 C 可以看成质点 $\boldsymbol{r}(t)$的轨迹，$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$的物理意义就是质点在 t_0 点的速度向量，$\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$则是加速度向量.

假定 t_0 点

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\neq 0.$$

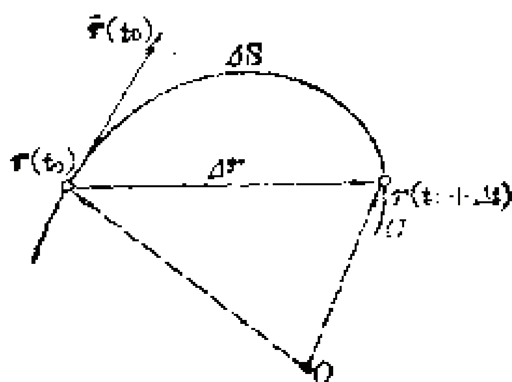


图 1-7

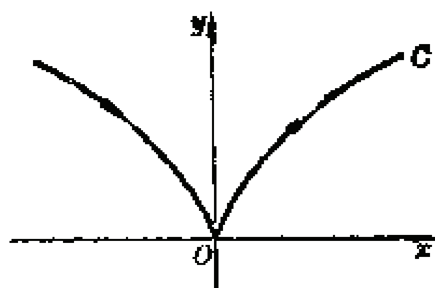


图 1-8

则称它为曲线 C 的正则点，以区别于奇点．当曲线 C 的所有点都是正则点时，就称正则曲线．

【例 1】 设平面曲线是

$$\boldsymbol{r}=\{t^3,\ t^2\}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

它的切向量

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\{3t^2,\ 2t\}.$$

在 $t=0$ 即原点 O 处，

$$\dot{\boldsymbol{r}}(0)=0.$$

所以它是曲线的奇点．曲线的方程也可写成 $y=x^{\frac{2}{3}}$，其图形如图 1-8 所示，显然，原点 O 是尖点，而且尖点的切线合于 y 轴．

为了排除这类不光滑的奇异情况，我们今后所讨论的都限于正则曲线，而不另加声明．

一条处处是奇点的曲线，也就是满足

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=0\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$

的曲线，经过积分，便有

$$\boldsymbol{r}(t)=\text{常向量 }\boldsymbol{r}_0,$$

就是曲线退化为空间一点．

现在我们来求曲线的弧长．在平面几何和解析几何中，直线段的长度是作为公理直接定义的．圆的周长则是从内接

正 n 边形的周长经过极限而求得的，其中实际上作了这样一个基本假定：圆周上无限接近的两点间的弧长等于对应弦的长度．对于更复杂曲线的弧长，我们也是根据上述基本假定给以定义并由此给出计算的．

设曲线 C 的两邻点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 与 $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$ 之间的弧长为 Δs，对应的弦长为 $|\Delta\boldsymbol{r}|$（图 1-7）．按照基本假定得出

$$\Delta s \approx |\Delta\boldsymbol{r}|,$$

从而

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，我们便得到

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|. \tag{3.2}$$

把上式从 t_0 到 t 积分后，我们有

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt. \tag{3.3}$$

$s(t)$ 称为曲线 C 从 t_0 到 t 点的弧长．上式也可写成分量表示式

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\,dt. \tag{3.4}$$

由于 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)\neq 0$，从 (3.2) 看出，总有

$$\frac{ds}{dt} > 0$$

成立．这表明弧长函数

$$s = s(t) \tag{3.5}$$

是 t 的光滑的单调函数，因此 $s(t)$ 的反函数存在，而且是 s 的光滑函数，记作

$$t = t(s). \tag{3.6}$$

用 s 作新参数以代替 t，那末曲线 C 的参数方程变为下

列形式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s). \tag{3.7}$$

因此，对于任意的空间曲线 C，我们一定能够求它的弧长 s，而用作为新参数．我们常常称 s 为自然参数．这时，从(3.2)式看出，曲线关于其弧长 s 的切向量是单位向量：

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=1.$$

这是选取弧长作为曲线参数而带来的第一个好处：它是把曲线上每一点的切向量都规范化为单位向量的．在以后的讨论中，特别在一些理论性的问题中，我们总是采用弧长 s 作为曲线的参数．这在理论上虽是简单的事情，但是在具体问题上，要把一条原来由 t 表示的曲线规范化为由其弧长参数来表达，可不是容易的，有时甚至根本写不出具体的变换式来．这是由于存在两方面的困难：

(1) $s=s(t)$ 要从(3.4)式计算得到，但是被积分函数一般是无理函数，往往“不好积分”，也就是说，它是不能由初等函数表示的．

(2) 从(3.5)求反函数 $t=t(s)$，只不过是理论上存在这样一个反函数，而实际上往往无法写出它的初等表示式来的．

从下文中的几个实际例子中，读者对此可能会得到更深刻的感受．

在举例之前，我们先约定：以后总是用 t 表示一般参数，用 s 表示弧长参数，用点号(·)表示对 t 求导，用撇号(′)表示对 s 求导，如

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\quad \ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2};$$

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\quad \boldsymbol{r}''(s)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2};$$

等等.

【例 2】 空间一条直线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{a}\neq 0,\ -\infty<t<+\infty). \tag{3.8}$$

它的切向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}$$

是常向量. 直线的弧长则是普通长度

$$s=\int_0^t \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt=\int_0^t |\boldsymbol{a}|\, dt=|\boldsymbol{a}|t.$$

由此解得反函数

$$t=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}s,$$

代入(3.8)式的右端, 其结果是直线由其长度表达的方程:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}s+\boldsymbol{b}, \tag{3.9}$$

式中

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

表示直线方向的单位向量.

【例 3】 在平面上, 半径 r 的圆决定于方程

$$\boldsymbol{r}=\{r\cos\theta,\ r\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \tag{3.10}$$

它的切向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}=\{-r\sin\theta,\ r\cos\theta\}$$

是定长向量函数.

它的弧长是

$$s=\int_0^\theta \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right| d\theta=\int_0^\theta r\, d\theta=r\theta,$$

由此得出

$$\theta=\frac{1}{r}s.$$

因此, 圆的自然参数表示方程是

$$\boldsymbol{r}=\left\{r\cos\frac{s}{r},\ r\sin\frac{s}{r}\right\},\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi r. \tag{3.11}$$

【例 4】 设平面上一个椭圆方程为

$$\boldsymbol{r}=\{\cos\theta,\ 2\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi, \tag{3.12}$$

它的切向量是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}=\{-\sin\theta,\ 2\cos\theta\},$$

而且从 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right|=\sqrt{\sin^2\theta+4\cos^2\theta}=\sqrt{4-3\sin^2\theta}$

$$=2\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta},$$

得出这椭圆的弧长

$$s=\int_0^\theta\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right|d\theta=2\int_0^\theta\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\,d\theta.$$

最后的积分叫做椭圆积分．此时把 θ 看成 s 的函数，就导出所谓椭圆函数．在必要时，可用数值积分法或查专门的椭圆积分表，求得椭圆积分的数值．椭圆积分是重要的一种特殊函数，最早它是在求椭圆的弧长时出现的，因而得名．

从本例我们可看到：$\theta=\theta(s)$ 是不能用初等函数表示的．

【例 5】 设平面上一抛物线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\left\{t,\ \frac{1}{2}t^2\right\}. \tag{3.13}$$

它的切向量是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\{1,\ t\}.$$

这时，经过积分便得出弧长的表示：

$$s=s(t)=\int_0^t\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=\int_0^t\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right).$$

然而，它的反函数 $t=t(s)$ 却不能用初等函数表示．

可见，空间曲线的弧长作为自然参数来看，主要是适用于其一般性质的理论研究.

【例 6】 设圆柱螺线(如图 1-9)的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}. \tag{3.14}$$

它的切向量是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\},$$

从其长度 $$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$$

得出曲线的弧长

$$s=\int_0^t\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t.$$

因此，我们得出圆柱螺线由自然参数表示的方程：

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

我们知道 z 轴的单位向量是

$$\boldsymbol{k}=\{0,\ 0,\ 1\},$$

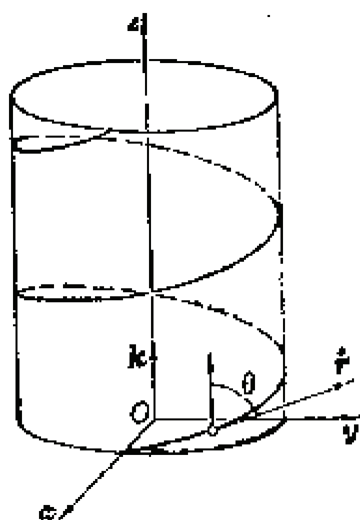


图 1-9

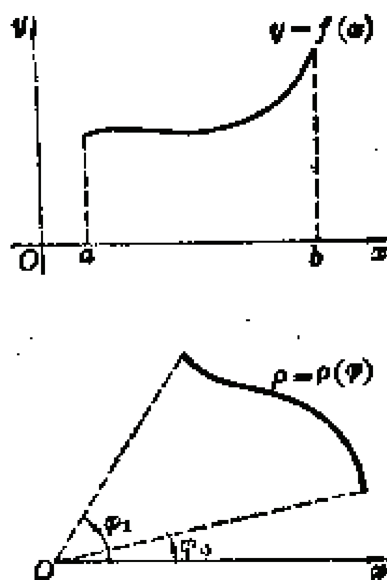


图 1-10

所以曲线的切线与 z 轴的夹角 θ 的余弦等于

$$\cos\theta=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

这就是说：圆柱螺线的切线与 z 轴相交于定角(图 1-9)。

以上所述，都是从曲线的参数方程导出它的弧长公式。但是，在工程技术中，如在微积分课程中所述，还需要平面曲线在直角坐标下的表示 $y=f(x)$ 和在极坐标下的表示

$$\rho=\rho(\varphi)$$

以及由此导出的弧长公式。关于这些，读者可参考本丛书的《一元函数积分学》，这里仅简述于下(参见图 1-10)：

(1) 直角坐标：从方程 $y=f(x)$ 得出

$$\text{弧长}\quad s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

式中 $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$.

(2) 极坐标：从方程 $\rho=\rho(\varphi)$ 得出

$$\text{弧长}\quad s=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi,$$

式中 $\rho'(\varphi)=\dfrac{d\rho}{d\varphi}$.

只要把曲线在直角坐标下和在极坐标下的方程分别归结成参数形式的方程，从一般的弧长公式(3.4)，便能获得上述结果。读者可作为习题来演算，以加深理解。

【例 7】 求阿基米德螺线 $\rho=a\varphi$ 从 φ_0 到 φ_1 之间的一段弧长。

解：
$$s=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{(a\varphi)^2+a^2}\,d\varphi=a\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$$
$$=\frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_0}^{\varphi_1}.$$

这个公式有一个有趣的应用：

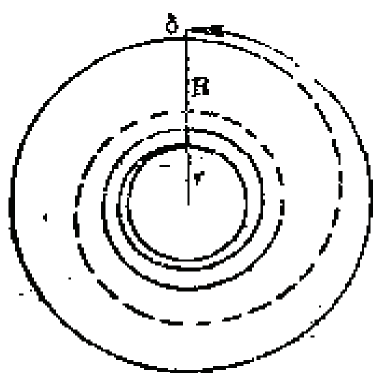


图 1-11

设有一大筒新闻纸，已经量得外半径为 R，内半径为 r，纸的厚度(包括两层纸之间的空隙)为 δ，求纸的总长度(图 1-11)。

因为纸的厚度是均匀的，筒纸的横截面曲线是阿基米德螺线：

$$\rho = a\varphi,$$

其中 a 是由纸的厚度决定的常数．设 φ 角的对应半径为 ρ，绕一圈后 φ 增加 2π，所对应的半径应该是 $\rho+\delta$，所以

$$\begin{cases} \rho = a\varphi \\ \rho+\delta = a(\varphi+2\pi), \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{1}{2\pi}\delta.$$

显然，上述积分的上、下限为

$$\varphi_1 = \frac{R}{a}, \quad \varphi_0 = \frac{r}{a},$$

所以纸的全长

$$s = \frac{a}{2}\left\{\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2} - \varphi_0\sqrt{1+\varphi_0^2} + \ln\frac{\varphi_1+\sqrt{1+\varphi_1^2}}{\varphi_0+\sqrt{1+\varphi_0^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{R\sqrt{a^2+R^2} - r\sqrt{a^2+r^2} + a^2\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{r+\sqrt{a^2+r^2}}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{\delta}\left\{R\sqrt{\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2+R^2} - r\sqrt{\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2+r^2}\right\}$$

$$+ \frac{\delta}{4\pi}\ln\frac{R+\sqrt{\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2+R^2}}{r+\sqrt{\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2+r^2}}.$$

如果把 δ 看成小量而略去 δ^2 以上的部分，则得到 s 的近似公式：

$$s=\frac{\pi}{\delta}(R^2-r^2)+\frac{\delta}{4\pi}\ln\frac{R}{r}.$$

习　题　四

1. 找出平面上圆内旋轮线（内摆线）

$$\boldsymbol{r}=\left\{3\cos\theta+2\cos\frac{3\theta}{2},\quad 3\sin\theta-2\sin\frac{3\theta}{2}\right\}$$

的所有奇点.

2. 试证明：

$$\boldsymbol{r}_1=\{t,\ \sin t,\ e^t\}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

与

$$\boldsymbol{r}_2=\{\ln\theta,\ \sin(\ln\theta),\ \theta\}\quad(0<\theta<+\infty)$$

是同一条曲线的两种表示.

3. 计算下列各段曲线的弧长（从 0 到 t）：

(1) 圆锥螺线　$\boldsymbol{r}=\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$,　$0\leqslant t\leqslant 1$;

(2) 双曲螺线　$\boldsymbol{r}=\{3\operatorname{ch}2t,\ 3\operatorname{sh}2t,\ 6t\}$,　$0\leqslant t\leqslant \pi$;

(3) 悬链线　$\boldsymbol{r}=\left\{t,\ a\operatorname{ch}\frac{t}{a},\ 0\right\}$,　$0\leqslant t\leqslant T$.

4. 求下列平面曲线的弧长：

(1) 直角坐标系中显式表示　$y=f(x)$;

(2) 极坐标方程 $\rho=\rho(\varphi)$，其中 ρ 为极径，φ 为极角.

5. 计算下列各段平面曲线的弧长：

(1) $y=\ln(1-x^2)$,　$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$;

(2) 对数螺线　$\rho=e^{a\varphi}$,　$0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$.

6. 试证明曲线

$$\boldsymbol{r}=\left\{\frac{1}{2}(s+\sqrt{1+s^2}),\ \frac{1}{2(s+\sqrt{1+s^2})},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(s+\sqrt{1+s^2})\right\}$$

的自然参数是 s.

7. 设平面上曳物线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\sin\varphi,\ -a\left(\cos\varphi+\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

$(a>0)$.

过曲线的任何点 P 作曲线的切线，使与 y 轴交于 Q 点(图 1-12).

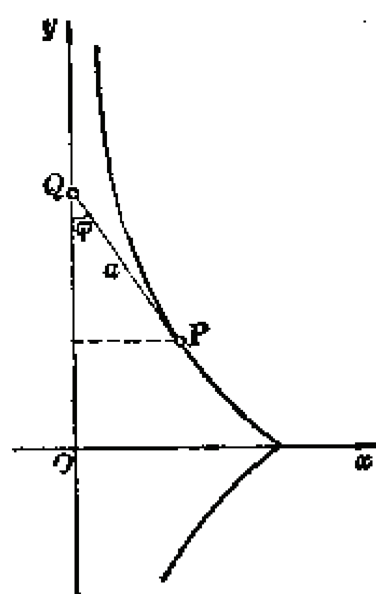


图 1-12

(1) 求切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi}$;

(2) 求

$$\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$$

一段的弧长;

(3) 证明:

$$\overline{PQ}=a.$$

3.2 曲率

对于一条空间曲线,采用自然参数 s 的表示方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s).\tag{3.15}$$

我们首先关心的问题是：这条曲线是怎样"弯曲"的？例如钟表里的一圈发条，越往里圈弯得越厉害，这是日常生活中人们对曲线弯曲程度的定性认识．在数学上给"弯曲"这个概念以描述的就是曲率.

为了把"曲率"定义得恰到好处，我们必须使它至少满足下述四项要求：

(1) 由于直线是毫无弯曲的曲线，它的曲率处处应该等于零;

(2) 圆是一条均匀弯曲的曲线,它的曲率应该处处相同;

(3) 在一条曲线上,凡是弯曲越厉害的地方,那里的曲率就应该越大;

(4) 对于一条平面曲线,还有向哪一边弯曲的问题.

如前所述，一条空间曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 关于 s 的一阶导函数 $\boldsymbol{r}'(s)$ 表示曲线的单位切向量．我们进一步考虑它的二阶导函数 $\boldsymbol{r}''(s)$，而且给出下列定义：

空间曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在点 S 的曲率为

$$k(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|. \tag{3.16}$$

当 $k(s)\neq 0$ 时，其倒数

$$R(s)=\frac{1}{k(s)}$$

称为曲线在点 S 的曲率半径．

按照这个定义，上述的前三项要求都能得到满足．至于平面曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率，对(3.16)的 $k(s)$ 必须考虑 $\boldsymbol{r}''(s)$ 的指向问题而适当添上正号或负号(参照§6)．

【例 1】 从直线方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}s+\boldsymbol{b} \tag{3.17}$$

得出

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e},\quad \boldsymbol{r}''=0.$$

所以直线的曲率处处为零．

【例 2】 从半径为 r 的圆的方程

$$\boldsymbol{r}=\left\{r\cos\frac{s}{r},\ r\sin\frac{s}{r}\right\}$$

得出

$$\boldsymbol{r}'=\left\{-\sin\frac{s}{r},\ \cos\frac{s}{r}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}''=\left\{-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r},\ -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right\}.$$

所以曲率是 $\qquad k=|\boldsymbol{r}''|=\dfrac{1}{r}$，

曲率半径等于半径 r．

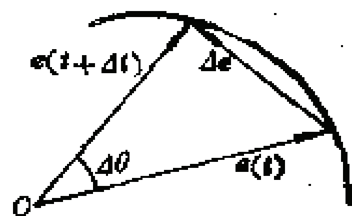


图 1-13

为了说明第三项要求，我们先证明一个引理：

设 $\boldsymbol{e}(t)$ 为空间单位向量函数，则有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{e}(t)}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right| \tag{3.18}$$

成立，其中 $\Delta\theta$ 表示向量 $\boldsymbol{e}(t+\Delta t)$ 与 $\boldsymbol{e}(t)$ 的夹角(图 1-13)。

实际上，按照向量函数的导数的定义，有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{e}(t)}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{e}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{e}|}{|\Delta t|}.$$

由于 $\boldsymbol{e}(t)$ 是单位向量函数，

$$|\boldsymbol{e}(t+\Delta t)| = |\boldsymbol{e}(t)| = 1,$$

因此

$$|\Delta\boldsymbol{e}| = \left|2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|.$$

从而

$$\left|\frac{d\boldsymbol{e}(t)}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|}{|\Delta t|}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right|\right)$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right|.$$

我们把曲线在点 S 的单位切向量记作

$$\boldsymbol{T}(s) \equiv \boldsymbol{r}'(s).$$

由于 $\boldsymbol{T}(s)$ 是单位向量函数，而且从(3.16)得出

$$k(s) = \left|\frac{d\boldsymbol{T}(s)}{ds}\right|, \tag{3.19}$$

所以按照引理，有

$$k(s) = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|, \tag{3.20}$$

式中 $\Delta\theta$ 表示相邻两切向量 $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$ 与 $\boldsymbol{T}(s)$ 的夹角。

从(3.20)式容易看出，曲线在其一点 S 的曲率 $k(s)$ 衡量

了曲线的切向量的倾斜角对其弧长 s 的变化率.

在这里,我们必须指出,平面曲线与空间曲线在曲率的定义上有不同之处,在前者,(3.20)应该是

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s},$$

就是说,等式右端不是绝对值.

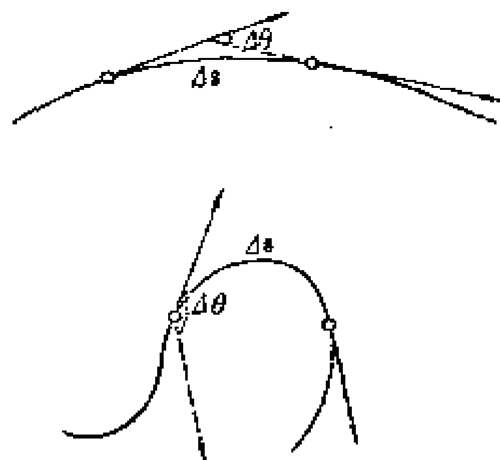


图 1-14

如图 1-14 所示,对于两条曲线上间隔同为 Δs 的两对点,弯曲较小的一对有较小的 $\Delta\theta$,从而在这里的曲率 k 也较小. 因此,第三项要求也就满足了.

上述曲率定义式(3.16)仅适用于曲线的弧长参数表示式. 然而在大量具体问题中,所给定的是曲线在一般参数 t 下的表示式. 所以我们有必要给出这种情况下的曲率公式. 我们将证明:

$$k=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}. \tag{3.21}$$

因为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2},$$

而且

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=1,$$

所以

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=0.$$

然而

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^2\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|^2-\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|^2$$

$$=\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|^2.$$

因此
$$k=\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|$$
$$=\left|\dot{\boldsymbol{r}}\frac{dt}{ds}\times\left\{\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^2t}{ds^2}\right\}\right|$$
$$=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|^3}=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}.$$

3.3 挠率

曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 关于其弧长 s 的一阶导函数 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}'(s)$ 是单位切向量，但是二阶导函数 $\boldsymbol{r}''(s)$ 一般并不是单位向量函数，因为它的长度即曲线在点 S 的曲率 k 一般不等于 1. 然而它垂直于 $\boldsymbol{T}$. 当 $k\neq0$ 时，我们把 $\boldsymbol{r}''(s)$ 规范化为单位向量，即：

定义 当 $k\neq0$ 时，单位向量

$$\boldsymbol{N}(s)=\frac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}\tag{3.22}$$

称为曲线在点 S 的主法向量，而且称

$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)\tag{3.23}$$

为曲线在同一点的从法向量.

定义式(3.22)也可写成

$$\boldsymbol{T}'(s)=k(s)\boldsymbol{N}(s).\tag{3.24}$$

在下文中，还会用到这个关系式. 必须指出：由于 $k>0$，$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{r}''$ 是同方向的两个向量.

由于 $\boldsymbol{T}(s)\perp\boldsymbol{N}(s)$，而且 $\boldsymbol{T}(s)$ 与 $\boldsymbol{N}(s)$ 都是单位向量，从(3.23)式得知 $\boldsymbol{B}(s)$ 是垂直于 $\boldsymbol{T}(s)$ 和 $\boldsymbol{N}(s)$ 的单位向量.

由此，我们在曲线上的任一点 S 获得一组两两正交的单位向量组 $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$. 这样，同曲线紧密联系在一起的三个向量形成了最重要的一个单位正交标架，而且它们

之间的微分关系是曲线论的基本关系。对此，我们将在下一节叙述。

从单位正交标架 $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ 出发，我们还可定义一组联系于曲线的平面和直线。

定义 在曲线上的点 S，

(1) 向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 与 $\boldsymbol{N}(s)$ 决定的平面称为密切平面；

(2) 向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s)$ 决定的平面称为从切平面；

(3) 向量 $\boldsymbol{N}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s)$ 决定的平面称为法平面；

(4) 以 $\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$、$\boldsymbol{B}(s)$ 为方向的直线分别称为曲线的切线、主法线、从法线（图1-15）。

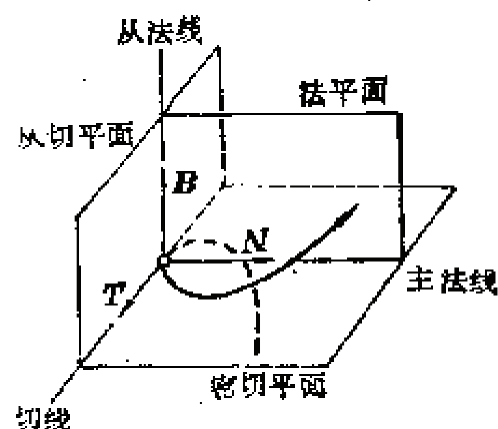


图 1-15

曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在点 S 的一组直线和平面的方程如下：

切线： $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+u\boldsymbol{T}(s)$；

主法线： $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+u\boldsymbol{N}(s)$；

从法线： $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+u\boldsymbol{B}(s)$；

法平面： $\boldsymbol{T}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0$；

从切平面：

$$\boldsymbol{N}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0;$$

密切平面：

$$\boldsymbol{B}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0,$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 代表动点的位置向量。

如所知，在曲线上的一点 S 只有一个垂直于切线的平面，就是法平面。但是，通过这里切线的平面即所谓切平面却有一族，其中有上述的两个：密切平面和从切平面。

密切平面在曲线论中尤其重要，它是同曲线关系最“紧密”相切的一个平面．也就是说，在所有切平面中，密切平面同曲线“最贴近”．对此我们不作严格的论证，而只作直观的描述．比如，从定义可直接看出：对于任意一条平面曲线，在其上的每一点的密切平面都合同于曲线所在的平面，自然是最贴近的平面．

不落在同一平面上的空间曲线，我们称之为挠曲线．如同弯曲的概念一样，曲线论中也有“挠扭”的概念，用以描述一条曲线在其一点偏离密切平面的程度．比如，一条弹簧，在压得很紧的时候，它的每一圈都接近于平面曲线；放开来时，便同平面曲线的偏离变大了．

为了描述这种偏离度，我们将用到密切平面的变化率，也就是用到密切平面的法向量 $\boldsymbol{B}$ 的变化率．这样，就导出曲线的“挠率”这一新概念．

关于 s 微分

$$\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0,$$

再利用(3.24)式以及 $\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)=0$，我们有

$$\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0. \tag{3.25}$$

又因 $\boldsymbol{B}(s)$ 是单位向量，故又有下式成立：

$$\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{B}(s)=0. \tag{3.26}$$

(3.25)和(3.26)表明：$\boldsymbol{B}'(s)$ 同时垂直于 $\boldsymbol{T}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s)$，从而平行于 $\boldsymbol{N}(s)$．所以

$$\boldsymbol{B}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s). \tag{3.27}$$

式中 $\tau(s)$ 是一个数量函数，前面的负号是为了方便添加的．

定义　(3.27)式中的函数

$$\tau(s)=-\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s), \tag{3.28}$$

称为曲线在 S 点处的挠率．

由此可见，挠率的绝对值等于 $\boldsymbol{B}'(s)$ 的长度：

$$|\tau(s)|=|\boldsymbol{B}'(s)|. \tag{3.29}$$

由于 $\boldsymbol{B}(s)$ 是单位向量函数，从上节引理中的(3.18)式得到

$$|\tau(s)|=|\boldsymbol{B}'(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|,$$

式中 $\Delta\varphi$ 表示曲线在两邻点 S 和 $S+\Delta S$ 的从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s+\Delta s)$ 的夹角，也即相应的两密切平面的夹角. 这说明：**挠率的绝对值衡量了曲线在其一点的密切平面的法线向量的倾斜角对其弧长的变化率，即曲线在其一点"偏离"相应的密切平面的程度.**

按照定义，曲率 $k(s)$ 总是正的，挠率 $\tau(s)$ 却带有正号或负号. 关于挠率符号的几何意义，我们将在第四节中给以说明.

我们证明下列定理：

定理 一般的空间曲线要成为平面曲线，充要条件是：它的挠率恒为零.

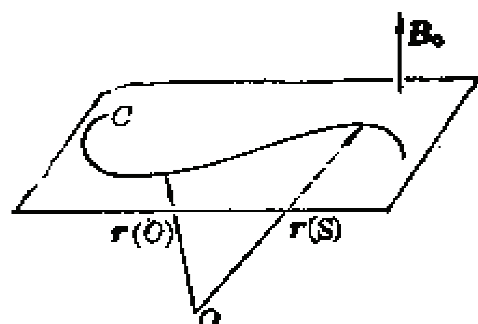


图 1-16

【证】 必要性是显然的，因为这时密切平面是固定平面.

反过来，假如 $\tau(s)\equiv 0$. 从(3.29)式，有 $\boldsymbol{B}'(s)\equiv 0$，即从法向量

$$\boldsymbol{B}(s)=\text{常向量 } \boldsymbol{B}_0,$$

从而

$$(\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0)'=\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0=0.$$

积分后，得

$$\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0=\text{常数 } p. \tag{3.30}$$

故所论曲线在一个定平面上(图 1-16). 】

【例 1】 求圆柱螺线的曲率和挠率.

设曲线的方程为

$$\boldsymbol{r}(s)=\{a\cos\omega s,\ a\sin\omega s,\ b\omega s\},$$

式中 a、b 是常数，

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

s 是弧长(见 3.1[例6])。

曲线的单位切向量是

$$\boldsymbol{T}(s)=\omega\{-a\sin\omega s,\ a\cos\omega s,\ b\},$$

从此得出 $$\boldsymbol{T}'(s)=-\omega^2a\{\cos\omega s,\ \sin\omega s,\ 0\}.$$

因此曲率 $$k=|\boldsymbol{T}'(s)|=\omega^2a=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

其次，转入挠率的计算. 从主法向量

$$\boldsymbol{N}(s)=\frac{\boldsymbol{T}'(s)}{|\boldsymbol{T}'(s)|}=\{-\cos\omega s,\ -\sin\omega s,\ 0\}$$

和从法向量 $$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(s)&=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)\\&=\omega\{b\sin\omega s,\ -b\cos\omega s,\ a\}\end{aligned}$$

容易导出 $$\begin{aligned}\boldsymbol{B}'(s)&=\omega^2b\{\cos\omega s,\ \sin\omega s,\ 0\}\\&=-\omega^2b\boldsymbol{N}(s).\end{aligned}$$

按照定义式(3.27)，挠率

$$\tau=\omega^2b=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

由此可见，一条圆柱螺线的曲率和挠率均为常数. 而且，当 $b>0$ 时，$\tau>0$；反之，当 $b<0$ 时，$\tau<0$. 就是说，按照螺线的右旋或左旋，挠率 τ 取正值或负值(参看第四节中图 1-33)。

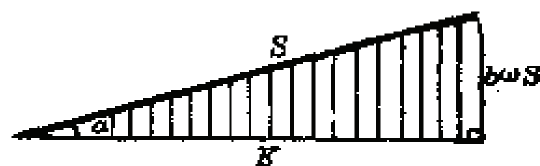
现在我们把直线、圆和圆柱螺线这三种曲线的曲率和挠率的特征归纳如下：

(1) 直线的曲率为零. 挠率对直线说来，是没有意义的。

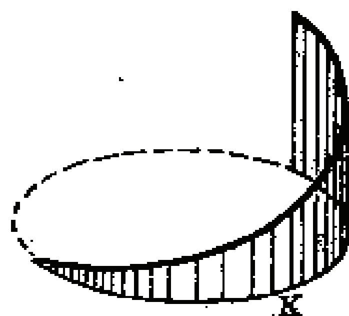
(2) 圆的曲率是常数，而且挠率等于零.

(3) 圆柱螺线的曲率和挠率都是非零的常数.

我们从曲率和挠率的角度观察一条挠曲线时，圆柱螺线显然是最简单的挠曲线，如同圆(包括直线)是最简单的平面曲线一样.



比圆柱螺线稍为复杂的空间曲线是一般螺线，它的定义如下：



当一条空间曲线的切向量和一固定方向成定角时，称为**一般螺线**.

从3.1段的例6可看出，圆柱螺线在各点的切线与轴线成定角，所以它是一般螺线的一种.

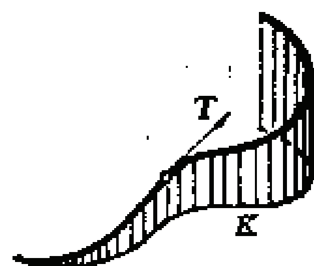


图 1-17

上述螺线可以用纸片模型作出具体构造，读者不妨自己动手试试.

剪锐角为 α 的一块直角三角形硬纸片，而且令

$$\sin\alpha = b\omega.$$

将这块三角形卷在半径为 a 的圆柱面上，使其底边 K 垂直于圆柱轴(图1-17)．那末，它的斜边所卷成的就是圆柱螺线．如果把圆柱面改为任意柱面，那末所得到的斜边曲线是一般螺线，并且柱面的轴与所卷成的曲线的切线成角 α．严格的证明要用到曲面论的知识，对此将在第二章介绍.

【例 2】 试证：一条空间曲线作为一般螺线的充要条件

是：其曲率与挠率之比等于常数，即

$$\frac{\tau(s)}{k(s)}=\text{常数 } a. \tag{3.31}$$

【证】 先证必要性：设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一般螺线. 由定义，它在其一点 S 的单位切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 与一固定方向 $\boldsymbol{u}$ 成定角 α（图 1-18）. 不妨取 $\boldsymbol{u}$ 为单位向量，则有

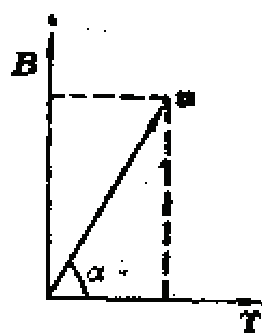


图 1-18

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\cos\alpha.$$

两边对 S 求导：

$$\begin{aligned}0=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})'&=\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{u}\\&=k\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

由于 $k\neq 0$，便有 $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{u}$. 然而 $\boldsymbol{N}$ 同时也垂直于 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{B}$，因此 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{B}$ 三向量共面，从而常向量 $\boldsymbol{u}$ 可以表成 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{u}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{T}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{B}. \tag{3.32}$$

我们再一次微分(3.32)，并注意到 $\boldsymbol{u}$ 是常向量，便得到

$$k\cos\alpha\cdot\boldsymbol{N}-\tau\sin\alpha\cdot\boldsymbol{N}=0,$$

$$\frac{\tau}{k}=\operatorname{ctg}\alpha\quad(\text{常数}).$$

其次，证充分性：我们只要把上述证明过程倒过来就可以了. 实际上，假定 $\frac{\tau}{k}=$ 常数，比方说，写作 $\operatorname{ctg}\alpha$. 那末

$$k\operatorname{ctg}\alpha-\tau=0.$$

现在作向量

$$\boldsymbol{u}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{T}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{B}, \tag{3.33}$$

从 $|\boldsymbol{u}|=1$ 得知它是单位向量. 关于 s 微分，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}'&=\cos\alpha\cdot k\boldsymbol{N}-\sin\alpha\cdot\tau\boldsymbol{N}\\&=\sin\alpha(k\operatorname{ctg}\alpha-\tau)\boldsymbol{N}=0,\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{u}$ 是常单位向量. 由(3.33)式又得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\cos\alpha.$$

所以所论曲线是一般螺线. ▌

在例 1 中,我们从定义算出挠率的次序如下:

先由曲线方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 决定单位切向量 $\boldsymbol{T}(s)$, 其次算出主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$ 和从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 及其导函数 $\boldsymbol{B}'(s)$, 而最后才得到挠率 $\tau(s)$. 这个过程较长, 而那些中间结果也不是都有用的. 能不能直接用 $\boldsymbol{r}(s)$ 及其逐阶导函数来表达 $\tau(s)$ 呢? 回答是肯定的.

实际上,推导的结果如下:

$$\tau=\frac{(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}''|^2}. \tag{3.34}$$

这是由于
$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}',\quad \boldsymbol{N}=\frac{1}{k}\boldsymbol{r}'',$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\frac{1}{k}\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'',$$

$$\boldsymbol{B}'=\left(\frac{1}{k}\right)'\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''+\frac{1}{k}\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'''.$$

所以由挠率的定义式(3.28),就有

$$\begin{aligned}\tau&=-\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{N}\\&=-\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''+\frac{1}{k}\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'''\right]\cdot\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{r}''\right)\\&=\frac{(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}''|^2}.\end{aligned}$$

当曲线为一般参数 t 所表示时, 挠率的表示可从参数变换 $s=s(t)$ 加以推导. 因为

$$\boldsymbol{r}'=\dot{\boldsymbol{r}}\frac{dt}{ds}, \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{r}''=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^2t}{ds^2}, \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{r}''' = \dddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\ddot{\boldsymbol{r}}\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \dot{\boldsymbol{r}}\frac{d^3t}{ds^3}, \qquad (3.37)$$

和

$$k = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}| = \frac{ds}{dt},$$

我们得出挠率在一般参数下的计算公式为

$$\tau = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}. \qquad (3.38)$$

综合以上所述，我们罗列曲线的 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 的表示式及它们之间的关系如下：

(1) 设曲线在弧长参数下的方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. 我们有活动标架的三个向量

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}' \\ \boldsymbol{N} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}''|}\boldsymbol{r}'' \\ \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}''|}\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''. \end{cases} \qquad (3.39)$$

(2) $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 两两垂直，而且

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N} \\ (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}) = 1. \end{cases} \qquad (3.40)$$

(3) 设曲线在一般参数下的方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. 我们有

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \dfrac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\dot{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T}. \end{cases} \qquad (3.41)$$

这里第一式是明显的；第二式则是由(3.39)和参数变换

$$s = s(t)$$

推导出来的. 在这里我们先求 $\boldsymbol{B}$, 然后求 $\boldsymbol{N}$. 读者可以考虑一下, 这是为什么?

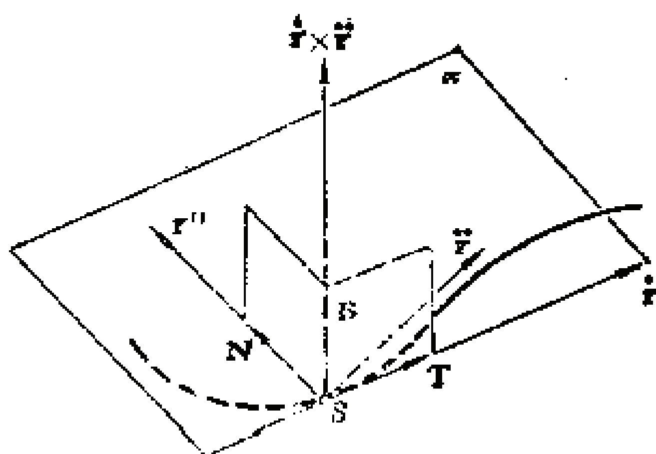


图 1-19

上述向量之间的关系如图 1-19 所示. 在曲线上点 S 处, $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 和 $\boldsymbol{r}''$ 三向量共面, 它们共落在点 S 的密切平面 Π 上. 还须指出, $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ 构成右手系的活动标架.

【例 3】 求三次参数曲线

$$\boldsymbol{r} = \{3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3\}$$

的 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 和 k、τ.

解:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = 3\{1 - t^2,\ 2t,\ 1 + t^2\},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 6\{-t,\ 1,\ t\},$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}} = 6\{-1,\ 0,\ 1\},$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = 18\{-1 + t^2,\ -2t,\ 1 + t^2\},$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}| = 3\sqrt{2}(1 + t^2),$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}| = 18\sqrt{2}(1 + t^2).$$

按照算式(3.41):

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \frac{2t}{1 + t^2},\ 1\right\},$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{-1 + t^2}{1 + t^2},\ \frac{-2t}{1 + t^2},\ 1\right\},$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T} = \left\{\frac{-2t}{1 + t^2},\ \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ 0\right\}.$$

从算式(3.21)和(3.38)又得

$$k=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}=\frac{1}{3(1+t^2)^2},$$

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|^2}=\frac{1}{3(1+t^2)^2}.$$

当曲线在一般参数下的方程已知时，本例表示了 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 和 k、τ 的典型算法. 如果参数是弧长，计算就更简单了.

【例 4】 曲率的力学意义.

设质量为 m 的质点沿曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 以匀速 v 运动着，s 是弧长，t 是时间，于是速度

$$\frac{ds}{dt}=\text{常数}\ v,\quad \frac{d^2s}{dt^2}=0.$$

这时，$\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 和 $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ 代表质点的速度向量和加速度向量. 按照质点运动的牛顿第二定律，质点受的力为

$$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\boldsymbol{r}''(s)=mv^2k(s)\boldsymbol{N}(s). \tag{3.42}$$

这说明：力的大小为 mkv^2，它的方向合于主法向量 $\boldsymbol{N}$. 即：质点受力正比于曲率 k，指向 $\boldsymbol{N}$ 方向，物理学上称为向心力.

我们坐在匀速行驶的公共汽车上，当汽车向左转弯，身体就要向右倾倒，全靠车厢壁作用于人体的侧向推力才得以保持平衡. 如果不计坐垫摩擦力，这个推力恰等于 mkv^2. 就是说：即使闭目不看，我们也能根据车壁侧向推力的大小，来估计公路各处的曲率的大小.

在实用上，曲率应用于铁路道轨铺设. 在铁路转弯处，如何把两段直的钢轨光滑地连接起来？作一个半径 R 的公切圆弧，是最简单的连接方式. 这种接合达到了 C^1 连续，即切线连续，但曲率不连续：在接合点，直线的曲率为零，圆的曲率为

$\frac{1}{R}$. 当火车通过该点时，火车作用在钢轨上的离心力一下从零跳到 $\frac{mv^2}{R}$. 这种经常性的冲击力会对路基造成损坏. 因此，设计师总是选用一段带有两个拐点*)的变曲率的曲线(图1-20中的虚线)连接两段直的钢轨，并且让这两个拐点(图中的两个圈点)恰好作为接合点.

有许多办法构造带有两个拐点的变曲率曲线，其中比较简单而又实用的是三次参数曲线，即 $\boldsymbol{r}(t)$ 的分量 x 和 y 都是 t 的三次多项式. 怎样使用并控制三次参数曲线的形状，是计算几何中研究得很透彻的一个问题，有现成的结果. 读者可参考：苏步青、刘鼎元著《计算几何》(上海科学技术出版社，1981年)一书.

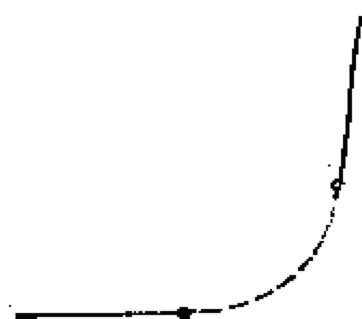


图 1-20

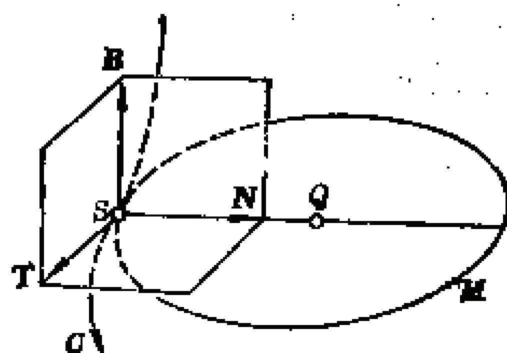


图 1-21

曲线的曲率 k 和主法向量 $\boldsymbol{N}$, 由于同质点的受力紧密联系在一起，因此人们在日常活动中都能亲身体验到这些几何概念. 然而，空间曲线的挠率 τ 因为涉及到 $\boldsymbol{r}(s)$ 的三阶导数，它的力学意义就不那末明显了.

最后，我们附带介绍一条曲线的曲率向量、曲率中心和密

*) 一条平面曲线上凹凸转向的点称为拐点；拐点处曲率必定为零. 详见第六节.

切圆三个概念：

设一条曲线 C 其弧长参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$.

(1) $k(s)\boldsymbol{N}(s)$称为曲线在点 S 的曲率向量；

(2) 以位置向量

$$\boldsymbol{r}(s)+R(s)\boldsymbol{N}(s)\left(R=\frac{1}{k}\right)$$

表示的点 Q 称为曲线在点 S 的曲率中心；

(3) 在点 S 的密切平面上，以曲率中心 Q 为圆心，曲率半径 $R(s)$ 为半径所作的圆 M，称为曲线在点 S 的密切圆（图 1-21）.

从定义知：密切圆与曲线在点 S 相切，而且它们有同一曲率．按照这种近似程度，工程技术中常常用密切圆近似地替代点 S 邻近的一段曲线．我们在 4.3 段还要给出一种更高水平的近似曲线，那要比密切圆更复杂些了.

习　题　五

1．求双曲螺线

$$\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}t,\ a\operatorname{sh}t,\ at\}$$

在参数值 0 与 t 之间的弧长，以及在 t 点的曲率 k 和挠率 τ.

2．求下列曲线的曲率 k 和挠率 τ：

(1) $\boldsymbol{r}=\{t-\sin t,\ 1-\cos t,\ t\}$;

(2) $\boldsymbol{r}=\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$;

(3) $\boldsymbol{r}=\{t,\ t^2,\ t^3\}$.

3．试证明下列曲线是弧长参数表示，并求它们的 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 和 k、τ：

(1) $\boldsymbol{r}=\left\{\frac{5}{13}\cos s,\ -\sin s,\ -\frac{12}{13}\cos s\right\}$;

(2) $\boldsymbol{r}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\sqrt{1+s^2},\ 2s,\ \ln(s+\sqrt{1+s^2})\}$.

4．证明曲线

$$\boldsymbol{r}=\left\{t,\ 1+\frac{1}{t},\ \frac{1}{t}-t\right\}$$

是平面曲线.

5. 在下列各式中，设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 为常向量；α、β、γ 为常数. 试证明：

(1) 二次参数曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}$$

必是平面曲线；

(2) 三次参数曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t^3+\boldsymbol{b}t^2+\boldsymbol{c}t+\boldsymbol{d}$$

为平面曲线的充要条件是行列式$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=0$；

*(3) 有理二次参数曲线

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{\varphi(t)}(\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}),\quad \varphi(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$$

必是平面曲线.

6. 问函数 $f(t)$ 取什么形式时，曲线

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ f(t)\}$$

是平面曲线.

7. 已知圆柱螺线

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\},$$

当固定圆柱半径 a 时，为了让曲率 k 或挠率 τ 达到极大，应分别取 b 为何值？

8. 试证明曲线

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\int_0^t \sin\alpha(t)dt,\ a\int_0^t \cos\alpha(t)dt,\ bt\right\}$$

是一般螺线.

9. 设曲线

$$\boldsymbol{r}=\{at,\ bt^2,\ t^3\}$$

为一般螺线. 求出 a 与 b 之间的关系，和对应的固定方向 $\boldsymbol{u}$.

10. 当 $k\tau\neq 0$ 时，试证明下列任一条件都可作为一般螺线的特征（即充要条件）：

(1) 曲线的主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$ 与一固定方向 $\boldsymbol{u}$ 垂直；

(2) 曲线的从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 与一固定方向 $\boldsymbol{u}$ 交于定角.

11. 证明

(1) $\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{B}'=-k\tau$; (2) $\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{N}'=0$;

(3) $\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{N}'=0$.

12. 已知曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,证明:

(1) $\boldsymbol{r}'''=-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B}$;

(2) $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')=k^2\tau$.

13. 试证明圆柱螺线 C 的曲率中心轨迹 C^* 也是圆柱螺线,而且 C 与 C^* 有同一轴线(即圆柱的轴).

[提示: 曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的曲率中心轨迹方程为 C^*:

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+R(s)\boldsymbol{N}(s).]$$

3.4 小结

本节介绍了一条曲线的三个基本几何量: 弧长 s、曲率 k、挠率 τ 以及切向量 $\boldsymbol{T}$、主法向量 $\boldsymbol{N}$ 和从法向量 $\boldsymbol{B}$ 所形成的正交标架.

在曲线论中,弧长 s 除了用于衡量曲线的长度外,它的优点是:在被选为曲线的参数时,许多公式都简单化、整齐化了.缺点是:弧长作为一般参数的函数时,它的函数表示常常是不易求到的. 具体曲线的计算还需求助于一般参数下的算式,尽管它有较复杂的表示式.

曲率 k 描写曲线的"弯曲程度",挠率 τ 描写曲线"偏离平面的程度". 这是曲线最重要的两个几何量. 它的重要性将在第五节中特别给以阐明: 曲率 k 和挠率 τ 作为弧长 s 的已知函数时,便可唯一地决定曲线的形状. 这称为**曲线论基本定理**. 平面曲线的特征是挠率 $\tau=0$, 因此平面曲线的形状唯一决定于它的曲率作为弧长 s 的函数 $k(s)$.

$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ 是曲线上最重要的一组单位正交标架. 我们还可利用这组标架的变动作为基本工具来研究一条曲线的

几何性质．这方面的内容将在下一节详述．

下面列出本节内容的主要公式，以供在曲线论中具体计算问题之用．

	空间曲线表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$	空间曲线表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$
弧长	s	$s=\int_0^t \lvert\dot{\boldsymbol{r}}\rvert dt$
弧长微分	ds	$ds=\lvert\dot{\boldsymbol{r}}\rvert dt$
单位切向量 $\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{r}'$	$\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\lvert\dot{\boldsymbol{r}}\rvert}$
主法向量 $\boldsymbol{N}$	$\dfrac{\boldsymbol{r}''}{\lvert\boldsymbol{r}''\rvert}$	$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}$
从法向量 $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$	$\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\lvert\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\rvert}$
曲率 k	$\lvert\boldsymbol{r}''\rvert$	$\dfrac{\lvert\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\rvert}{\lvert\dot{\boldsymbol{r}}\rvert^3}$
挠率 τ	$\dfrac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{k^2}$	$\dfrac{(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{\lvert\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\rvert^2}$

第四节　弗雷耐标架和弗雷耐公式

现在提供研究曲线几何性质的最重要的工具——弗雷耐标架和弗雷耐公式．它们最早是由弗雷耐(Frenet)在1847年发现的*)．弗雷耐标架的构造和弗雷耐公式的证明都很简单，但用处极大．大凡求解曲线论的问题，总是离不开弗雷耐公式，因此，它被称为"曲线论基本公式"．

*) 赛雷(Serret)于1851年发现这个公式．有些书上也称弗雷耐公式为弗雷耐-赛雷公式．

4.1 弗雷耐标架

我们在上一节求得了已知曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(S)$ 在每一点 S 的单位切向量 $\boldsymbol{T}(S)$、主法向量 $N(S)$ 和从法向量 $\boldsymbol{B}(S)$.

$$\{\boldsymbol{T}(S),\ \boldsymbol{N}(S),\ \boldsymbol{B}(S)\}$$

是两两正交的单位向量组，可以把它们看成粘附在曲线的 S 点处而以 $\boldsymbol{r}(S)$ 为原点的单位右手系正交标架. 当点 S 移动时，这组标架随之沿着曲线运动，因此它成为曲线上的“活动标架”(图 1-15).

定义 单位右手系正交标架

$$\{\boldsymbol{r}(S);\ \boldsymbol{T}(S),\ \boldsymbol{N}(S),\ \boldsymbol{B}(S)\}$$

称为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(S)$ 在点 S 的弗雷耐标架.

有关曲线的弗雷耐标架的计算公式，不论是在弧长参数或在一般参数的表示下，都已经罗列在上一节中了.

在曲线论中，经常使用这组随参数的变化而活动的弗雷耐标架，以取代固定的笛卡儿直角标架 $\{0; \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$. 这种活动标架法，在近代微分几何中起着很大的作用.

人们在实际生活中，也不时会用到活动标架方法. 一条船航行在茫茫大海上，如果我们取其前进方向为 $\boldsymbol{T}$，铅垂向上为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}$ 是沿水平面而指向左舷的向量(图 1-22). 当水手观察到海面上空一架直升飞机时，他报出下列读数：正前方 x 米，左侧 y 米，高度 z 米. 这三个数字(包括符号在内)就是飞机在活动标架 $\{\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ 中的三个坐标分量，它们是时间 t 的函数. 即使直升飞机悬于空中不动，因为船自身的运动，飞机的坐标 $x,\ y,\ z$ 也要变动. 这一点与固定的笛卡儿标架不一样.

在上例中，活动坐标确实比固定坐标方便. 不然的话，在

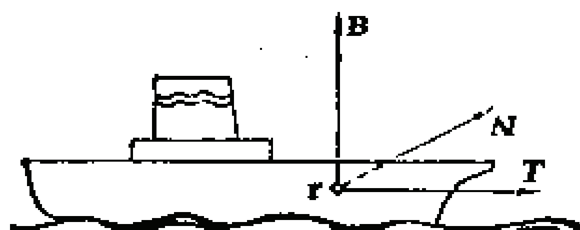


图 1-22

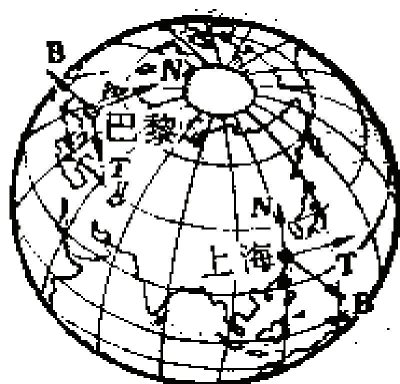


图 1-23

地球中心安放一个笛卡儿直角标架，用以测度飞机的位置，那是不胜其烦的．实际上，当一场海战打起来之后，对舰船火器说来，真正有用的数据正是敌机在活动标架中的坐标 x, y, z, 敌机的经纬度却是次要的．

曲面上也有类似的活动标架．比方说，在上海建立测定方位的坐标系，一般取单位右手系正交标架 $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ 合于向东、向北、向上三个方向．对上海地区说来，整个地表面近似看成平面，因此，$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ 在小范围内近似地是一个固定标架．如果在巴黎也建立相仿的单位右手系正交标架 $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$，使合于当地的向东、向北、向上三个方向时，那末和上海的 $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ 就不一样．这是因为上海和巴黎同处于一个球面上，而具有不同的经纬度(图 1-23)．关于曲面上活动标架的具体构造，我们将在第二章介绍．

【例】 设圆柱螺线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\omega s,\ a\sin\omega s,\ b\omega s\},$$

式中 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, s 是弧长参数, $a>0$.

从 3.3 段的例 1 得知

$$\boldsymbol{T}=\omega\{-a\sin\omega s,\ a\cos\omega s,\ b\},$$

$$N=\{-\cos\omega s,\ -\sin\omega s,\ 0\},$$

$$B=\omega\{b\sin\omega s,\ -b\cos\omega s,\ a\}.$$

图 1-24 画了 $b<0$ 时的圆柱螺线，这时挠率

$$\tau=\frac{b}{a^2+b^2}<0,$$

圆柱螺线是左旋的．我们将在 4.3 段中说明：圆柱螺线依挠率为正或负而分成右旋和左旋两种．

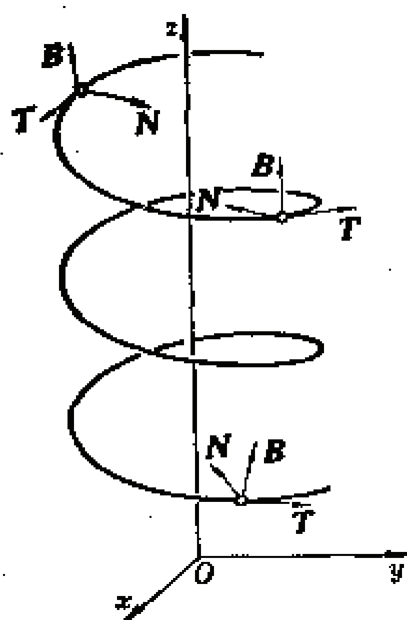


图 1-24

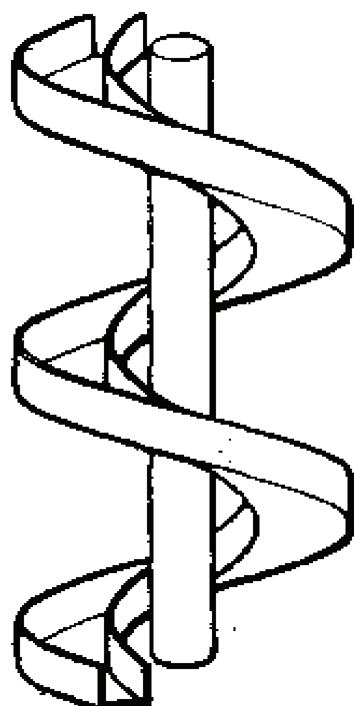


图 1-25

注意：$\boldsymbol{T}$ 的第三分量 $\omega b<0$，所以它是向下倾斜的．$\boldsymbol{N}$ 的第三分量为零，它总是平行于水平面且指向 z 轴．$\boldsymbol{B}$ 的第三分量 $\omega a>0$，它是向上倾斜的．

某公园里有一种左旋的螺旋滑梯(图 1-25)．当孩子们从高处下滑时，假定始终保持这样一种姿势：两腿伸直紧贴梯面，左臂伸平指向轴线，上身挺而垂直于双腿，那末，腿、左臂、上身三者就构成左旋圆柱螺线的一组弗雷耐标架．随

着人的下滑，旁观者将会看到这组标架是怎样沿着圆柱螺线“活动”的.

4.2 弗雷耐公式

我们在第二节学习了向量函数 $\boldsymbol{R}(S)$. 把 $\boldsymbol{R}(S)$ 分解在某一固定标架 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 上，便给出分量表示式

$$\boldsymbol{R}(S)=x(S)\boldsymbol{i}+y(S)\boldsymbol{j}+z(S)\boldsymbol{k}.$$

向量函数 $\boldsymbol{R}(S)$ 的各阶导数

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{R}(S),\ \frac{d^2}{ds^2}\boldsymbol{R}(S),\ \cdots,$$

等等，都能简单地用诸分量的相应阶导数来表示.

在曲线论中，我们常常把 $\boldsymbol{R}(S)$ 分解在某一条曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(S)$$

在点 S 的弗雷耐标架 $\{\boldsymbol{T}(S), \boldsymbol{N}(S), \boldsymbol{B}(S)\}$ 上(图 1-26)：

$$\boldsymbol{R}(S)=\alpha(S)\boldsymbol{T}(S)+\beta(S)\boldsymbol{N}(S)+\gamma(S)\boldsymbol{B}(S).$$

这时，一阶导数

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{R}(S)=\alpha'\boldsymbol{T}+\beta'\boldsymbol{N}+\gamma'\boldsymbol{B}+\alpha\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}+\beta\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}+\gamma\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}. \tag{4.1}$$

二阶导数将有更多的项. 这就需要求出标架向量 $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$

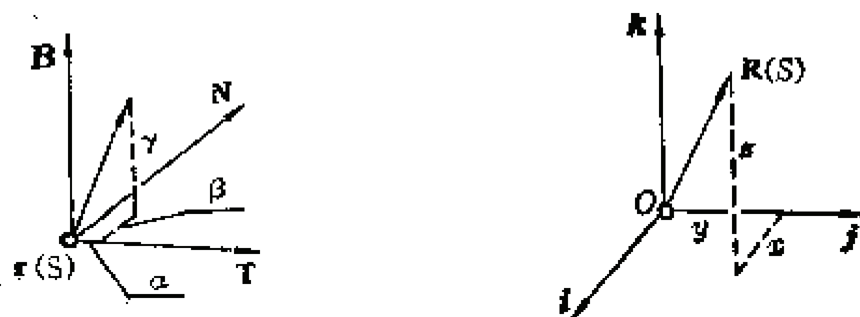


图 1-26

的导数 $\boldsymbol{T}'(S)$, $\boldsymbol{N}'(S)$, $\boldsymbol{B}'(S)$.

当 s 是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(S)$ 的弧长时，从(3.24)与(3.27)式已经有

$$\boldsymbol{T}'=k\boldsymbol{N},\quad \boldsymbol{B}'=-\tau\boldsymbol{N}.$$

为了求 $\boldsymbol{N}'$，我们首先注意到 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 是单位右手系正交标架，有关系

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}.$$

对第二式两边关于 s 求导：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}'&=\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}'=-\tau\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\times(k\boldsymbol{N})\\&=\tau\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{T}.\end{aligned}$$

综上所述，我们得到弗雷耐公式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}'= & & k\boldsymbol{N} & \\ \boldsymbol{N}'= & -k\boldsymbol{T} & & +\tau\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}'= & & -\tau\boldsymbol{N} & \end{cases}\tag{4.2}$$

它也可写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}'\\ \boldsymbol{N}'\\ \boldsymbol{B}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}.\tag{4.3}$$

注意：(4.3)的系数矩阵是反对称的，对角线上的元素全为零，左下角和右上角的元素也为零．系数矩阵中只有两个自由度：曲率 k 和挠率 τ．弗雷耐公式写成矩阵形式，会有助于记忆．

把弗雷耐公式(4.2)代入(4.1)的右端，便求得 $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{R}(S)$ 作为 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ 的线性组合．同样，也可导出 $\boldsymbol{R}(S)$ 的任意阶导数的表示式．

从下文的说明中可见到，空间曲线的微分几何是在弗雷

耐公式的基础上形成的．因此，弗雷耐公式又称为曲线论的基本公式．

下面我们举几个例子来说明如何运用弗雷耐标架和弗雷耐公式证明曲线有关的一些定理．

【例 1】 如果一条曲线在各点的密切平面互相平行，它必须是平面曲线．

实际上，设曲线的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，而且 s 是弧长．题中的条件是说

$$\boldsymbol{B}(s)=\text{常向量 }\boldsymbol{B}_0.$$

记 $\boldsymbol{r}_0\equiv\boldsymbol{r}(0)$．我们只要证明

$$\boldsymbol{B}_0\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)=0.$$

为此，从

$$\frac{d}{ds}[\boldsymbol{B}_0\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)]=\boldsymbol{B}_0\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)'=\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{r}'(s)$$

$$=\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0$$

得知 $\boldsymbol{B}_0\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)$ 等于常数，从而必等于 0．

我们还可以给出更简单的证明，即从题中的条件导出挠率 $\tau=0$，在此就不详述了．

【例 2】 若曲线的所有法平面都通过定点，则曲线是球面曲线(即曲线落在某个球面上)．反之也对．

【证】 我们不妨取这个定点为原点 O．按照条件，曲线在每点 S 处的法平面通过原点 O，于是有 $\boldsymbol{r}(s)\perp\boldsymbol{T}(s)$，即

$$\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0.$$

另一方面， $$(\boldsymbol{r}^2)'=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}=0,$$

积分得 $$\boldsymbol{r}^2=\text{常数 }r^2,$$

即曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 落在半径为 r 的球面上．

反过来，设曲线在一个半径为 r 的球面上．我们取球心

为原点 O, 则有

$$\boldsymbol{r}^2=r^2,$$

于是
$$2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}=0,$$

就是 $\boldsymbol{r}(s)\perp\boldsymbol{T}(s)$. 可是 $\boldsymbol{T}(s)$是曲线在点 S 处的法平面的法向量,所以这个法平面必须通过球心 O. 】

习 题 六

1. 试证明曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在一般参数下的弗雷耐公式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}= & kv\boldsymbol{N} & \\ \dot{\boldsymbol{N}}=-kv\dot{\boldsymbol{T}} & & +\tau v\boldsymbol{B}\\ \dot{\boldsymbol{B}}= & -\tau v\boldsymbol{N} & \end{cases},$$

式中 $v=|\dot{\boldsymbol{r}}|$.

2. 试证明:

(1) $(\boldsymbol{T}', \boldsymbol{T}'', \boldsymbol{T}''')=k^5\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)$;

(2) $(\boldsymbol{B}', \boldsymbol{B}'', \boldsymbol{B}''')=\tau^5\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{k}{\tau}\right)$;

(3) $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}', \boldsymbol{N}'')=k^2\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)$;

(4) $(\boldsymbol{N}', \boldsymbol{N}'', \boldsymbol{N}''')=(k^2+\tau^2)\dfrac{d}{ds}(k\tau'-k'\tau)$

$$-\frac{3}{2}(k\tau'-k'\tau)\frac{d}{ds}(k^2+\tau^2).$$

3. 设空间曲线的切线和从法线同一个固定方向的夹角分别为 φ 和 ψ, 试证明:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}=-\frac{k}{\tau}.$$

4. 已知曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的曲率 k 和挠率 τ, 试寻求向量函数 $\boldsymbol{\Omega}(s)$, 使下式成立:

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{N}'=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{B}'=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}.\end{cases}$$

5. 将 $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$ 和 $\frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4}$ 写成 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 的线性组合.

6. 证明下列曲线是球面曲线:

(1) $\boldsymbol{r}=\{a\sin^2 t,\ a\sin t\cos t,\ a\cos t\}$;

(2) $\boldsymbol{r}=\{-\cos 2\theta,\ -2\cos\theta,\ \sin 2\theta\}$.

7. 已知曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. 试证明: 若曲线 C 的

(1) 所有切线通过定点, 则 C 是直线;

(2) 所有切线互相平行, 则 C 是直线;

(3) 所有主法线通过定点, 则 C 是圆;

(4) 所有切线平行于同一平面, 则 C 是平面曲线;

(5) 所有从法线平行于同一平面, 则 C 是平面曲线;

(6) 所有密切平面通过定点, 则 C 是平面曲线.

8. 设 D 是半径为 r 的球面, 而且一条空间曲线在弧长 s 表示下的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. 试证明:

(1) 若曲线的所有法平面与 D 相切, 则 $\boldsymbol{r}^2=as+\boldsymbol{r}^2(0)$;

(2) 若曲线的所有密切平面与 D 相切, 则 $\boldsymbol{r}(s)$ 或为平面曲线或满足

$$\boldsymbol{r}=a\left(\frac{\tau}{k}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\right).$$

9. 设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 落在以原点为球心的球面上, s 是弧长参数, 曲线的曲率 k 与挠率 τ 都不为零, 试证明:

$$\boldsymbol{r}=-R\boldsymbol{N}-\frac{R'}{\tau}\boldsymbol{B},$$

式中曲率半径

$$R=\frac{1}{k},\quad R'=\frac{dR}{ds}.$$

4.3 空间曲线在一点邻近的结构

本段中, 我们将运用弗雷耐标架和弗雷耐公式研究空间曲线在其一点邻近的结构. 这项研究的用处是:

(1) 在机械工程问题中, 有时需要弄清楚一条空间曲线在某点附近的具体形状, 并给以恰当的表述.

(2) 当曲线在每一点邻近的形状都被分析清楚之后，我们对整段曲线的形状便有一个比较全面的了解.

(3) 说明挠率 τ 的符号的几何意义.

为了研究曲线在一点 P_0 邻近的性质，我们自然会想到两种局部性质的有用工具：

(1) 曲线的向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在 P_0 点的泰勒展开；

(2) 曲线在 P_0 点的弗雷耐标架的运用.

为了简化书写记号，我们选择弧长 s 为参数，使曲线在 P_0 点对应于 $s=0$. 然后，在 $s=0$ 附近将 $\boldsymbol{r}(s)$ 按照泰勒公式展开为

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(0)+s\boldsymbol{r}'(0)+\frac{1}{2!}s^2\boldsymbol{r}''(0)$$

$$+\frac{1}{3!}s^3\boldsymbol{r}'''(0)+(\boldsymbol{4}), \tag{4.4}$$

式中$(\boldsymbol{4})$代表余项，是 4 阶微量. 注意到

$$\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{T},$$

$$\boldsymbol{r}''(s)=k\boldsymbol{N},$$

$$\boldsymbol{r}'''(s)=-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B},$$

在上列诸式中取 $s=0$，再代入(4.4)式，便有

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(0)=\left(s-\frac{k_0^2}{6}s^3\right)\boldsymbol{T}_0+\left(\frac{k_0}{2}s^2+\frac{k_0'}{6}s^3\right)\boldsymbol{N}_0$$

$$+\frac{k_0\tau_0}{6}s^3\boldsymbol{B}_0+(\boldsymbol{4}),$$

式中记号 k_0, τ_0, k_0' 和 $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{N}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ 依次代表 $k(s)$, $\tau(s)$, $k'(s)$ 和 $\boldsymbol{T}(s)$, $\boldsymbol{N}(s)$, $\boldsymbol{B}(s)$ 在 $s=0$ 的值.

现在取曲线在 P_0 点的弗雷耐标架 $\{\boldsymbol{r}(0);\ \boldsymbol{T}_0,\ \boldsymbol{N}_0,\ \boldsymbol{B}_0\}$ 为新坐标系，此时，曲线在点 $S=0$ 的邻近点的新坐标 x, y, z 可展开为

$$
\begin{cases}
x = s - \dfrac{k_0^2}{6} s^3 + (4) \\
y = \dfrac{k_0}{2} s^2 + \dfrac{k_0'}{6} s^3 + (4) \\
z = \dfrac{k_0 \tau_0}{6} s^3 + (4).
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

这组表达式称为布开(Bouquet)公式，亦称曲线在 P_0 的邻域内的规范展开．

一般，$k_0\tau_0 \neq 0$．如果我们仅仅取到(4.5)中每式的第一项，而略去高阶项，就得到一条在 P_0 点邻近和原曲线 C 近似的曲线 C^*，它在 P_0 的邻点 P 的局部坐标可以表成

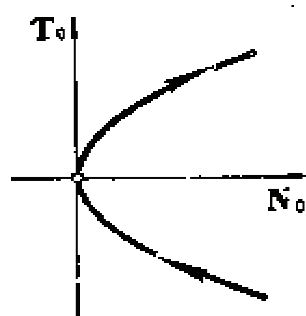
$$
\begin{cases}
x = s \\
y = \dfrac{k_0}{2} s^2 \\
z = \dfrac{k_0 \tau_0}{6} s^3.
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

由此可见，s 越小，被略去的高阶项也越小，所以曲线 C^* 与原曲线 C 在 P_0 的邻近非常靠近．

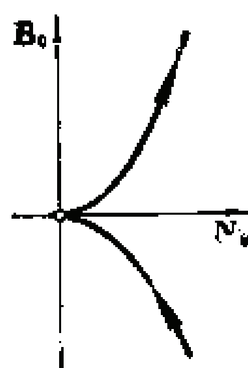
近似曲线 C^* 与原曲线 C 在 P_0 点有相同的曲率 k_0 和挠率 τ_0 以及相同的弗雷耐标架 $\{\boldsymbol{r}(0);\ \boldsymbol{T}_0,\ \boldsymbol{N}_0,\ \boldsymbol{B}_0\}$，于是在 P_0 点有同一的密切平面、法平面和从切平面．这一结论作为习题七的第 1 题，留给读者证明．需要注意的是：s 是原曲线 C 的弧长，但不是近似曲线 C^* 的弧长．

从(4.6)立即得出曲线 C^* 在弗雷耐标架的各坐标面上的投影曲线，[1]它们当然代表着原曲线 C 在这三个面上投影曲线的近似．详细地说，我们有：

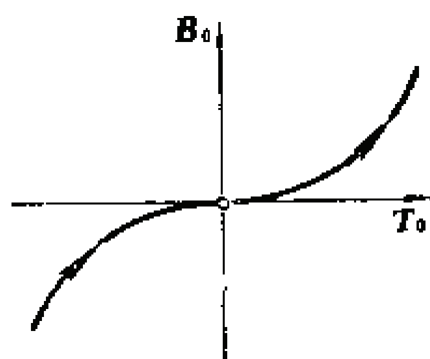
(1) 曲线 C 在 P_0 点的密切平面上的近似投影是一条抛物线(图 1-27(a))



(a) 在密切平面的投影



(b) 在法平面的投影



(c) 在从切平面的投影

图 1-27

$$
\begin{cases} x = s \\ y = \dfrac{k_0}{2} s^2. \end{cases} \tag{4.7}
$$

(2) 曲线 C 在 P_0 点的法平面上的近似投影是半立方抛物线(图 1-27(b))

$$
\begin{cases} y = \dfrac{k_0}{2} s^2 \\ z = \dfrac{k_0 \tau_0}{6} s^3. \end{cases} \tag{4.8}
$$

(3) 曲线 C 在 P_0 点的从切平面上的近似投影是一条立方抛物线(图 1-27(c))

$$
\begin{cases}
x = s \\
z = \dfrac{k_0\tau_0}{6}s^3.
\end{cases}
\tag{4.9}
$$

图 1-28 示意了当 $\tau_0>0$ 时，近似曲线 C^* 连同它的三条投影曲线一起表示在 P_0 点的弗雷耐标架中的图象.

结合方程 (4.6) 和图 1-28，我们获得原曲线 C 在 P_0 点邻近的两项几何性质：

(1) 在 P_0 点邻近，曲线 C 完全落在从切平面的指向 $\boldsymbol{N}_0$ 的一侧. 这是因为 $k_0>0$，根据(4.6)有

$$y\geqslant 0,$$

而且仅当 $s=0$ 时，$y=0$.

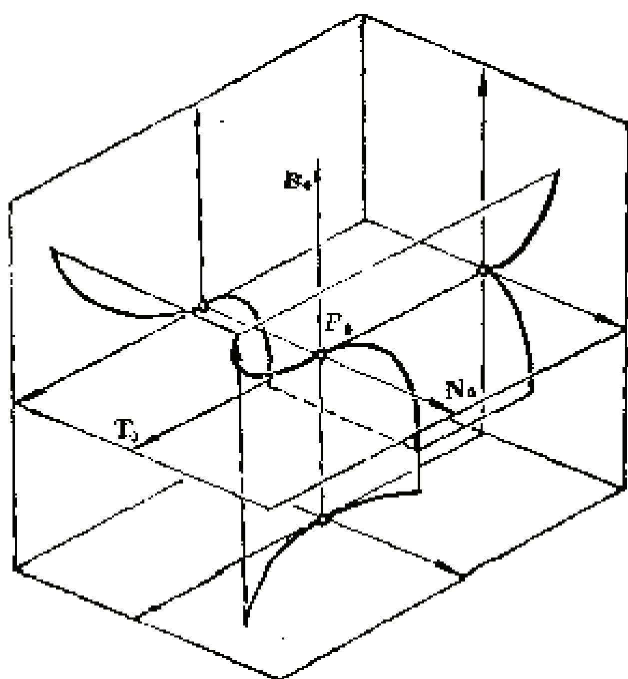
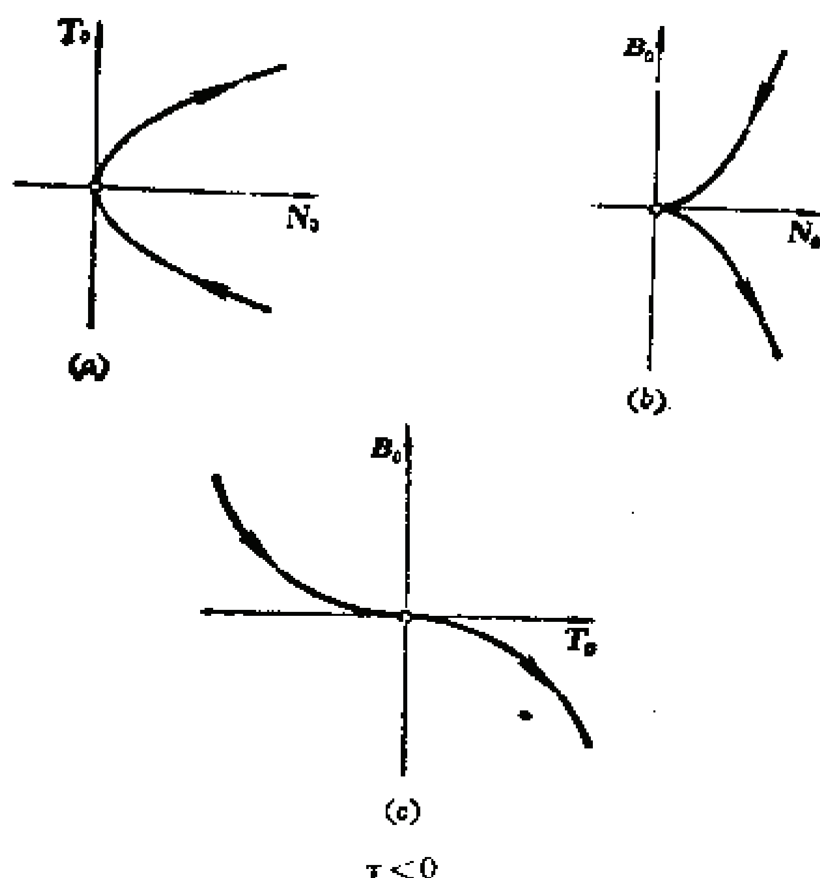


图 1-28

(2) 挠率符号的几何意义：在 P_0 点附近，从(4.6)中的第三式知，若 $\tau_0>0$，曲线 C 沿着弧长增加的方向穿过密切平面，指向 $\boldsymbol{B}_0$ 的正方向；而当 $\tau_0<0$ 时，则指向其负方向.

图 1-28 画了 $\tau_0>0$ 的情况. 曲线上的箭头代表弧长增加的方向，它们在坐标原点与 $\boldsymbol{T}_0$ 的方向是一致的.

当 $\tau_0<0$ 时，因为方程(4.7)与 τ_0 无关，图 1-27(a)保持不变. 但在方程(4.8)与(4.9)中的 z 分量与 τ_0 有关. 容易看出，只要把图 1-27(b) 和(c)的曲线关于水平轴作一对称变换，便得到 $\tau_0<0$ 时的图象. 这时曲线上的箭头也要一起变换. 变换后，图(b)的形状不变，但箭头反向.



$\tau<0$

图 1-29

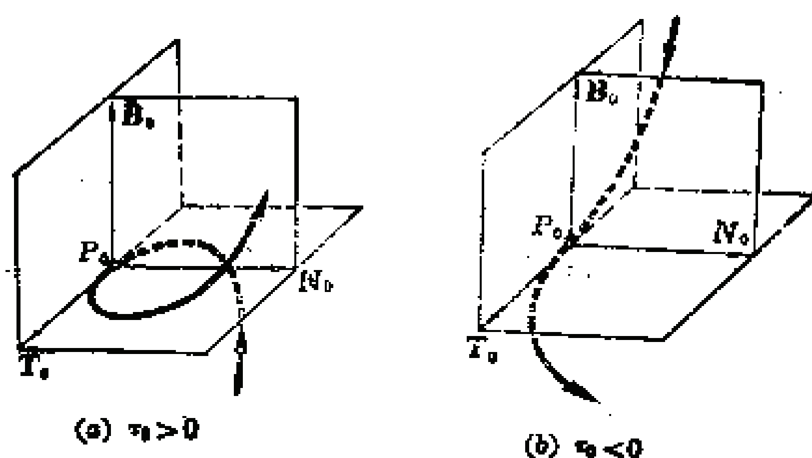


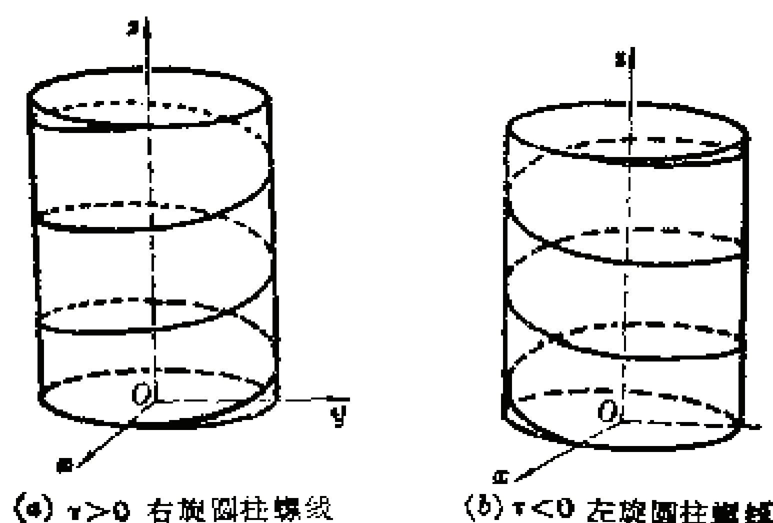
图 1-30

$\tau_0<0$ 时，曲线 C^* 的三条投影曲线表示在图 1-29 中。

图 1-30 给出了(a) $\tau_0>0$ 和(b) $\tau_0<0$ 时的两种曲线在 P_0 点邻近的空间示意图。

现在，我们进一步阐明挠率符号的几何意义。按照 3.3 段

例1的计算结果，圆柱螺线的挠率τ等于常数$\frac{b}{a^2+b^2}$，因此，τ与b的正负号相同．图1-31是按照b的不同符号画出的两种螺旋线．根据空间解析几何中的右手法则判断，当$\tau>0$时，曲线是右旋的，称为"右旋圆柱螺线"；反之，当$\tau<0$时，曲线是左旋的，称为"左旋圆柱螺线"．



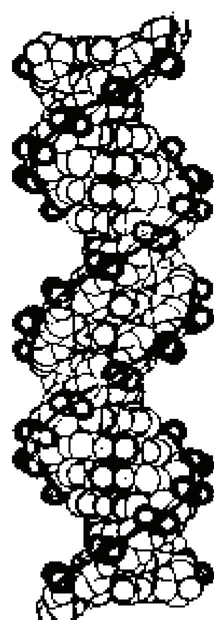
(a) $\tau>0$ 右旋圆柱螺线　　(b) $\tau<0$ 左旋圆柱螺线

图 1-31

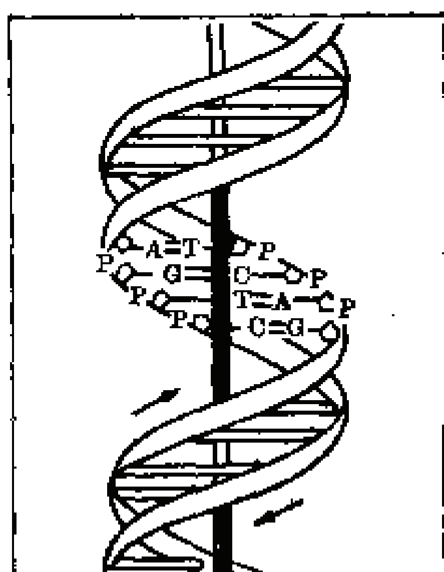
据此，我们自然地按照τ_0为正或负，而称曲线C在P_0点邻近分别为右旋或左旋．这是因为从一小段曲线来看，前者同右旋圆柱螺线相似；后者同左旋圆柱螺线相似．

请读者注意不要产生这样一种错觉，以为把一条右旋圆柱螺线颠倒过来，就成了左旋圆柱螺线．这是办不到的．不信可以把图1-31倒过来试试，它们的旋向仍然不变．只有对照着镜子里的象，曲线的旋向才会发生变化．因为旋向是用挠率τ的符号标志的，用几何术语来讲，挠率是刚体运动不变量．而在反射变换下，挠率将改变符号．

自然界中存在式样各异、花色繁多的螺旋线，它们大都按照一定的规律保持各自的旋向．葡萄藤是右旋的，啤酒花藤



(a) DNA 分子模型



(b) 示意图

图 1-32 右旋 DNA 分子双螺旋结构

是左旋的. 生物体中携带遗传信息的基本物质 DNA(脱氧核糖核酸)分子则是右旋的双螺旋结构(图 1-32). 新近发现了少数左旋的 DNA 片断,但它的机理还不甚明了.

习 题 七

1. 证明曲线

$$\boldsymbol{r}=\left\{t,\ \frac{k_0}{2}t^2,\ \frac{k_0\tau_0}{6}t^3\right\}$$

在 $t=0$ 处的曲率与挠率为 k_0 与 τ_0, 而且 $\boldsymbol{T}(0)$、$\boldsymbol{N}(0)$、$\boldsymbol{B}(0)$分别重合于 x 轴、y 轴、z 轴.

(本题说明: 近似曲线与原曲线在原点的曲率与挠率各各相等, 而且有同一组弗雷耐标架.)

2. 设以弧长 s 为参数的曲线 C 的曲率 k 和挠率 τ 都为正, 弗雷耐标架为 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$. 作曲线

$$C^*:\quad \boldsymbol{r}^*(s)=\int_0^s \boldsymbol{B}(s)ds.$$

试证: (1) s 也是曲线 C^* 的弧长;

(2) 曲线 C^* 的曲率 k^*、挠率 τ^* 和弗雷耐标架分别为

$$k^*=\tau,\ \tau^*=k\quad 和\quad \{\boldsymbol{r}^*;\ \boldsymbol{B},\ -\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{T}\}.$$

4.4 小结

我们在解析几何中经常使用固定不动的笛卡儿直角坐标系，而在微分几何中则引入了曲线的弗雷耐标架 $\{\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$. 这个活动标架的优点在于对微分有利，因为微分就是从运动产生的. 不但如此，弗雷耐标架的微分正是为曲线的曲率 k 和挠率 τ 所刻划，而 k 和 τ 又是曲线最基本的两个几何量，这就是弗雷耐公式的内容.

弗雷耐标架和弗雷耐公式在曲线论中是最基本的. 空间曲线在弧长表示下的弗雷耐公式具有下列的矩阵表示式：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}'\\ \boldsymbol{N}'\\ \boldsymbol{B}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

第五节　空间曲线论基本定理

5.1 基本定理

给定一条空间曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ (s 是弧长)，我们便可求得曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 这两个几何量. 人们自然要问，是不是还会引出第三个几何量来？

本节的基本定理将回答这个问题：为了刻划一条空间曲线在空间的形状，只要曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 两个几何量便已足够了，并不存在第三个几何量.

人们接着要问的是：随便给出两个函数 $\bar{k}(s)$ 和 $\bar{\tau}(s)$，是否必定存在空间曲线 C，其曲率 $k=\bar{k}(s)$，挠率 $\tau=\bar{\tau}(s)$？当

然，这里的函数 $\bar{k}(s)$ 和 $\bar{\tau}(s)$ 需要附加某些限制，比方说

$$\bar{\tau}(s)\in C^0,\quad \bar{k}(s)\in C^1,\quad \bar{k}(s)>0.$$

这是因为，一条曲线的曲率和挠率必须满足这些条件.

上述两个问题合起来便是曲线论基本定理的内容，特别称后者为存在性问题，前者为唯一性问题.

曲线论基本定理 在区间 $(0, L)$ 上任意给定连续可微函数 $\bar{k}(s)>0$ 和连续函数 $\bar{\tau}(s)$ 以及初始正交标架 $\{\boldsymbol{r}_0; \boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{B}_0\}$，其中 $(\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{B}_0)$ 为单位正交右旋向量组. 则唯一存在一条 C^3 类的正则曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，使得

(1) s 是曲线 C 的弧长参数;

(2) 曲线 C 在 $s=0$ 处的弗雷耐标架

$\{\boldsymbol{r}(0); \boldsymbol{T}(0), \boldsymbol{N}(0), \boldsymbol{B}(0)\}=\{\boldsymbol{r}_0; \boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{B}_0\}$;

(3) 曲线 C 的曲率 $k(s)=\bar{k}(s)$，挠率 $\tau(s)=\bar{\tau}(s)$.

基本定理的证明较长，在给出证明之前，我们先介绍一下证明的思路.

如果存在一条分别以 $\bar{k}(s)>0$ 和 $\bar{\tau}(s)$ 为曲率和挠率的 C^3 类曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ (s 是弧长)，则下列弗雷耐公式必须成立:

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{T}\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\qquad\qquad \bar{k}(s)\boldsymbol{N}\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{N}}{ds}=-\bar{k}(s)\boldsymbol{T}\qquad\qquad +\bar{\tau}(s)\boldsymbol{B}\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds}=\qquad\qquad -\bar{\tau}(s)\boldsymbol{N}\end{cases} \tag{5.1}$$

现在，我们把问题倒过来看，将(5.1)看成关于未知向量函数 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ 的线性齐次常微分方程组，而且在已知系

数 $\bar{k}(s)>0$、$\bar{\tau}(s)$ 为连续函数的条件下，求解 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，使得 s 是弧长，$\{\boldsymbol{r}(s);\ \boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)\}$ 是曲线在 S 点的弗雷耐活动标架.

按照常微分方程的理论，当给定初始条件 $\{\boldsymbol{r}_0;\ \boldsymbol{T}_0,\ \boldsymbol{N}_0,\ \boldsymbol{B}_0\}$ 时，上列方程组的解唯一存在，从而获得曲线

$$C:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s).$$

剩下来的问题是：要证明这样得来的曲线 C 必定满足基本定理中的三项要求.

对于不熟悉常微分方程理论的读者说来，可以略去基本定理的证明不看，这样，并不会影响对本书的学习和掌握.

为了完备起见，我们还是把证明叙述于下：

首先，将关于线性齐次常微分方程组的解的唯一存在定理表述为下面的引理.

引理 设 $a_{ij}(s)\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ 是在区间 $[0,\ L]$ 上定义的 9 个连续函数，那末关于 $\boldsymbol{u}_i(s)\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 的线性齐次常微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{u}_i(s)}{ds}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}(s)\boldsymbol{u}_j(s)\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

的解必存在，而且当给定初始条件 $\boldsymbol{u}_i(0)=\boldsymbol{u}_i^0\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 时，解是唯一的.

其次，将前面几节中所讨论的曲线论的内容按照分析的次序安排如下：

已知曲线 C $\xrightarrow{\text{微分}}$ 弗雷耐标架 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 弗雷耐公式 $\longrightarrow$ 曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$.

基本定理的证明可以看成一个综合的过程，也就是把上述分析过程的次序颠倒过来：

已知函数 $\bar{k}(s)$ 和 $\bar{\tau}(s)$ $\longrightarrow$ 建立常微分方程组（相当于弗

雷耐公式) $\xrightarrow{\text{求解}}$ 弗雷耐标架 $\xrightarrow{\text{决定}}$ 曲线 C.

最后,我们把定理的证明分成三个步骤,就是:构造标架;构造曲线 C;证明曲线 C 满足定理的要求. 其中,第一个步骤最为庞大,它相当于对(5.1)中的后三个方程作为常微分方程组求解. 第二个步骤较为简单,只要对(5.1)中的第一式求解就可以了.

基本定理的证明

I. 构造标架

我们首先用已知函数 $\bar{k}(s)>0$ 和 $\bar{\tau}(s)$ 来建立相当于引理中的线性齐次常微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{u}_i(s)}{ds}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}(s)\boldsymbol{u}_j(s) \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{5.2}$$

其中系数矩阵为 3×3 的反对称阵

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & \bar{k} & 0 \\ -\bar{k} & 0 & \bar{\tau} \\ 0 & -\bar{\tau} & 0 \end{pmatrix}.$$

设方程组的初始条件为

$$\boldsymbol{u}_1(0)=\boldsymbol{T}_0, \quad \boldsymbol{u}_2(0)=\boldsymbol{N}_0, \quad \boldsymbol{u}_3(0)=\boldsymbol{B}_0.$$

这里,$\boldsymbol{T}_0$、$\boldsymbol{N}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 为给定的单位正交右旋向量组.

按照引理,方程组(5.2)的解必存在,而且是唯一的:

$$\boldsymbol{u}_1(s), \quad \boldsymbol{u}_2(s), \quad \boldsymbol{u}_3(s).$$

现在我们证明:上面得到的一组解 $\boldsymbol{u}_1(s)$、$\boldsymbol{u}_2(s)$、$\boldsymbol{u}_3(s)$ 在每个 S 处必构成一个单位正交右旋向量组.

实际上,记

$$p_{ij}(s)=\boldsymbol{u}_i(s)\cdot\boldsymbol{u}_j(s) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3).$$

从

$$\frac{dp_{ij}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{u}_i}{ds}\cdot\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{d\boldsymbol{u}_j}{ds}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\boldsymbol{u}_k\right)\cdot\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{u}_i\cdot\left(\sum_{k=1}^{3}a_{jk}\boldsymbol{u}_k\right),$$

得出

$$\frac{dp_{ij}}{ds}=\sum_{k=1}^{3}(a_{ik}p_{kj}+a_{jk}p_{ki})\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3).\qquad(5.3)$$

按照方程组(5.2)的初始条件，我们有

$$p_{ij}(0)=\boldsymbol{u}_i(0)\cdot\boldsymbol{u}_j(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 当\ i\neq j;\\ 1, & 当\ i=j.\end{cases}\qquad(5.4)$$

这样，这 p_{ij} 构成了以(5.4)为初始条件的微分方程组(5.3)的一组解。

另一方面，由于(a_{ij})为反对称矩阵，我们有

$$\sum_{k=1}^{3}(a_{ik}\delta_{kj}+a_{jk}\delta_{ki})=a_{ij}+a_{ji}=0\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3).$$

所以

$$p_{ij}=\delta_{ij}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\qquad(5.5)$$

也是方程组(5.3)的一组解，而且满足(5.4)。

从引理立即得到

$$\boldsymbol{u}_i(s)\cdot\boldsymbol{u}_j(s)=\delta_{ij}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3).$$

这就表明了 $\boldsymbol{u}_1(s)$、$\boldsymbol{u}_2(s)$、$\boldsymbol{u}_3(s)$对于每个 s 值总是构成单位正交向量组。又按混合积$(\boldsymbol{u}_1(s),\ \boldsymbol{u}_2(s),\ \boldsymbol{u}_3(s))$等于 $+1$ 或 -1 的不同而区分向量组 $\boldsymbol{u}_1(s)$、$\boldsymbol{u}_2(s)$、$\boldsymbol{u}_3(s)$ 为右旋或左旋。然而，当 $s=0$ 时，

$$(\boldsymbol{u}_1(0),\ \boldsymbol{u}_2(0),\ \boldsymbol{u}_3(0))=(\boldsymbol{T}_0,\ \boldsymbol{N}_0,\ \boldsymbol{B}_0)=1,$$

而且混合积$(\boldsymbol{u}_1(s),\ \boldsymbol{u}_2(s),\ \boldsymbol{u}_3(s))$是常数，所以恒等于1。

II. 构造曲线C

作

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}_0+\int_0^s \boldsymbol{u}_1(s)ds, \tag{5.6}$$

便得到所要的曲线 C.

III. 这样的曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 必满足定理的所有条件.

先将(5.6)式对 s 求导三次:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{u}_1(s), \tag{5.7}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d\boldsymbol{u}_1}{ds}=\bar{k}(s)\boldsymbol{u}_2, \tag{5.8}$$

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}=\bar{k}'\boldsymbol{u}_2+\bar{k}(-\bar{k}\boldsymbol{u}_1+\bar{\tau}\boldsymbol{u}_3). \tag{5.9}$$

因为 $\bar{k}(s)\in C^1$, $\bar{\tau}(s)\in C^0$, 从而 $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$ 连续, 即 $\boldsymbol{r}(s)\in C^3$, 而且

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=|\boldsymbol{u}_1(s)|=1,$$

所以 s 是曲线 C 的弧长参数.

其次, 为了证明曲线 C 的弗雷耐标架是

$$\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)\}=\{\boldsymbol{u}_1(s),\ \boldsymbol{u}_2(s),\ \boldsymbol{u}_3(s)\},$$

而且曲率 $\qquad k(s)=\bar{k}(s),$

挠率 $\qquad \tau(s)=\bar{\tau}(s),$

我们从(5.7)和(5.8)得知

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{u}_1,\quad k\boldsymbol{N}=\bar{k}\boldsymbol{u}_2.$$

可是 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 均为单位向量, 且 k、$\bar{k}>0$, 便有

$$k=\bar{k},\quad \boldsymbol{N}=\boldsymbol{u}_2.$$

于是, 曲线 C 的从法向量

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_3.$$

对两边关于 s 求导,

$$-\tau N=\frac{dB}{ds}=\frac{d\boldsymbol{u}_3}{ds}=-\bar{\tau}\boldsymbol{u}_2,$$

式中第一个等号的成立是用了关于曲线 C 的弗雷耐公式，最后一个等号的成立则因为 $\boldsymbol{u}_3$ 是方程组(5.2)的解．从而我们得到

$$\tau=\bar{\tau}.$$

最后，从(5.6)以及方程组(5.2)的初始条件，我们有

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{r}(0);\ \boldsymbol{T}(0),\ \boldsymbol{N}(0),\ \boldsymbol{B}(0)\}\\&=\{\boldsymbol{r}_0;\ \boldsymbol{u}_1(0),\ \boldsymbol{u}_2(0),\ \boldsymbol{u}_3(0)\}\\&=\{\boldsymbol{r}_0;\ \boldsymbol{T}_0,\ \boldsymbol{N}_0,\ \boldsymbol{B}_0\}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

这就证明了满足给定初始条件的曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的存在性和唯一性．】

下面我们阐述一下给定的条件和初始条件在曲线论的基本定理中所起的作用．

(1) 定理的已知条件

$$\bar{k}(s)\in C^1,\quad \bar{\tau}(s)\in C^0,\quad \bar{k}(s)>0$$

在证明过程中，为了保证方程组(5.2)有解，只需要 $\bar{k}(s)$ 和 $\bar{\tau}(s)$ 都是 s 的连续函数就够了．有的课本上讲述曲线论的基本定理时，只是作 $\bar{k}(s)$、$\bar{\tau}(s)\in C^0$ 的假定．但是，我们从(5.9)可看出，这种假定太弱，不能保证曲线 C 的三阶连续可微，从而不能保证曲线 C 有挠率．因此，条件 $\bar{k}(s)\in C^1$ 是必要的．条件 $\bar{k}(s)>0$，则是为了空间曲线 C 的曲率必须是正的．

(2) 定理的初始条件 $\{\boldsymbol{r}_0;\ \boldsymbol{T}_0,\ \boldsymbol{N}_0,\ \boldsymbol{B}_0\}$

这一初始条件相当于常微分方程组(5.1)的初始条件，借以保证解曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的唯一性．也就是说，给定了初始条件，便唯一地决定曲线 C；变动初始条件，便得到不同的解

曲线.

假如把初始条件取消，仅仅给定曲率函数 $\bar{k}(s)$ 和挠率函数 $\bar{\tau}(s)$ 的话，便存在无穷多条的解曲线. 那末，这些解曲线之间有什么关系呢？答案很简单：所有解曲线的形状都相同，也就是说，通过一个空间运动，可以使其中任意一条曲线重合于另一条曲线. 这一结论表述为基本定理的一个系.

系 设两条曲线 C_1 与 C_2 在弧长相同的点具有相同的曲率与挠率，则通过一个运动可使曲线 C_1 重合于 C_2. 也就是说，这两条曲线相互合同.

【证】 设 $\{\boldsymbol{r}_1(0); \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{B}_1\}$ 与 $\{\boldsymbol{r}_2(0); \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{B}_2\}$ 分别是曲线 C_1 与 C_2 在 $s=0$ 处的弗雷耐标架. 易见，存在一个运动 M，使标架 $\{\boldsymbol{r}_2(0); \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{B}_2\}$ 变换为标架 $\{\boldsymbol{r}_1(0); \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{B}_1\}$. 详细说来，先通过平移将 $\boldsymbol{r}_2(0)$ 搬到 $\boldsymbol{r}_1(0)$，再通过绕 $\boldsymbol{r}_1(0)$ 的旋转使 $\boldsymbol{T}_2$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{B}_2$ 分别合于 $\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{B}_1$.

设曲线 C_2 经过这个运动 M 变为 C_2^*. 由于弧长、曲率和挠率仅仅是依赖于两点间的距离和两向量间的夹角而定义的，它们在运动 M 的作用下保持不变. 这样一来，在点 S 处，C_2^* 的曲率和挠率与曲线 C_2 从而也与曲线 C_1 的曲率和挠率分别相等，而且曲线 C_2^* 与 C_1 在 $S=0$ 处有同一的弗雷耐标架，按照曲线论基本定理中解的唯一性知：C_1 与 C_2^* 完全重合(图 1-33). 证毕. 】

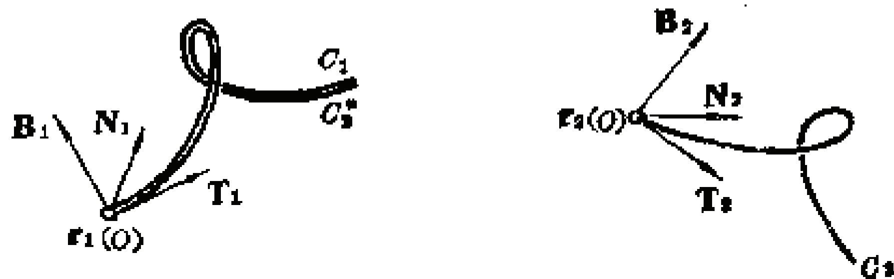


图 1-33

在常见的微分几何教材中，有关曲线论的基本定理的表述方式并不是完全一致的. 有的教材中称这里的系为曲线论基本定理；有的教材中则称基本定理为曲线论的唯一存在定理，包括两部分内容：

I. 存在性定理：在区间 (a, b) 上任意给定 C^1 类函数

$$k(s)>0$$

和 C^0 类函数 $\tau(s)$，分别以这些函数为曲率和挠率的空间曲线必定存在.

II. 唯一性定理：即本段的系.

如曲线论的基本定理所示，给定了曲率函数 $k(s)$ 和挠率函数 $\tau(s)$，除了其在空间的位置外，曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是唯一确定的. 但是，这不等于说：我们可写出 $\boldsymbol{r}(s)$ 的解析表达式. 因为要找出 $\boldsymbol{r}(s)$，必须把(5.1)作为一个线性齐次常微分方程组解出来，而在一般情况下是得不到解的显式表示的. 当然，必要时，我们可以给出逼近收敛的近似解，以适用于需要数值计算的场合.

在某些特殊情况下，我们能够把 $\boldsymbol{r}(s)$ 解析地表示出来. 比方说，在平面曲线的场合，$\tau=0$，这时曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 是以积分形式给出的(参见下一节的 6.2 段). 举例如下：

【例】 求满足 $\tau=ck$（c 为常数）的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$.

解：这时，曲线的弗雷耐公式为

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}= & k\boldsymbol{N} & \\ \dfrac{d\boldsymbol{N}}{ds}=-k\boldsymbol{T} & & +ck\boldsymbol{B} \\ \dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds}= & -ck\boldsymbol{N} & \end{cases} \tag{5.11}$$

为了解这组方程，引进新参数

$$t=t(s)\equiv\int_0^s k(s)ds.$$

于是，改写方程组(5.11)为

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{T}}{dt}= & \boldsymbol{N} & \\ \dfrac{d\boldsymbol{N}}{dt}=-\boldsymbol{T} & & +c\boldsymbol{B} \\ \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}= & -c\boldsymbol{N} & .\end{cases} \tag{5.12}$$

我们把弧长参数 s 变换成一般参数 t，其目的就是：把变系数的常微分方程组(5.11)变成常系数的常微分方程组(5.12)，以便于用现成的方法求出它的解 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$. 进而考虑到(5.12)的右端项比较稀疏，我们有更简单的求解方法.

对(5.12)中的第二式两边关于 t 求导，再将(5.12)的第一式和第三式代入，便得

$$\frac{d^2\boldsymbol{N}}{dt^2}=-\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}+c\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=-\boldsymbol{N}-c^2\boldsymbol{N}=-\omega^2\boldsymbol{N},$$

式中 $\omega=\sqrt{1+c^2}$. 上列方程的解是(参见2.5段[例2])

$$\boldsymbol{N}(t)=\cos\omega t\boldsymbol{a}+\sin\omega t\boldsymbol{b}, \tag{5.13}$$

其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为积分常向量. 将(5.13)代入(5.12)的第一式，积分后得到

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{1}{\omega}(\sin\omega t\boldsymbol{a}-\cos\omega t\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{f}), \tag{5.14}$$

这里 $c\boldsymbol{f}$ 是积分常向量.

再将(5.13)和(5.14)代入(5.12)的第二式，求得

$$\boldsymbol{B}(t)=-\frac{c}{\omega}(\sin\omega t\boldsymbol{a}-\cos\omega t\boldsymbol{b})+\frac{1}{\omega}\boldsymbol{f}. \tag{5.15}$$

容易验证，由(5.13)和(5.15)表示的 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也满足

(5.12)的第三式. 这表明由(5.13)、(5.14)、(5.15)给出的$\{\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{B}(t)\}$确是方程组(5.12)的通解, 其中$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{f}$是三个积分常向量.

接着, 从(5.1)的第一式就得到所求的曲线方程

$$\boldsymbol{r}(s)=\frac{1}{\omega}\left[\left(\int_0^s \sin \omega t(s) ds\right)\boldsymbol{a}\right.$$
$$\left.-\left(\int_0^s \cos \omega t(s) ds\right)\boldsymbol{b}+cs\boldsymbol{f}\right]+\boldsymbol{g}, \qquad (5.16)$$

其中$\boldsymbol{g}$是积分常向量. 取$s=0$, 便得$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{r}(0)$.

最后, 我们讨论一下初始标架问题. 从曲线论基本定理的条件中可看到, 在起点$s=0$, 即当$t=0$时, 应当保证初始标架$\{\boldsymbol{T}(0), \boldsymbol{N}(0), \boldsymbol{B}(0)\}$为单位正交右旋标架. 于是, 我们对三个积分常向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{f}$附加某些限制.

在(5.13)、(5.14)、(5.15)式中置$t=0$, 得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(0)= & -\dfrac{1}{\omega}\boldsymbol{b}+\dfrac{c}{\omega}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{N}(0)=\boldsymbol{a} & \\ \boldsymbol{B}(0)= & \dfrac{c}{\omega}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{\omega}\boldsymbol{f},\end{cases}$$

写成矩阵形式便是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}(0)\\ \boldsymbol{N}(0)\\ \boldsymbol{B}(0)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{f}\end{pmatrix}, \qquad (5.17)$$

式中矩阵 $$A=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\end{pmatrix}.$$

是行列式为 1 的正交阵，这只要验证 $AA^T=I$（A^T 是 A 的转置阵，I 是单位阵）便可明了. 因此，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{f}\}$ 必须为单位正交右旋标架.

综上所述，我们得到结论：曲率和挠率满足 $\tau=ck$（c 为常数，$k>0$）的曲线的通解决定于(5.16)式，式中 $\boldsymbol{g}$ 是任意常向量，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{f}\}$ 是空间任意一组单位正交右旋标架. 如果给定初始标架 $\{\boldsymbol{r}(0);\boldsymbol{T}(0),\boldsymbol{N}(0),\boldsymbol{B}(0)\}$，对应的唯一的解曲线也由(5.16)式给出，但式中 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{r}(0)$，且

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{f}\end{pmatrix}=A^T\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}(0)\\\boldsymbol{N}(0)\\\boldsymbol{B}(0)\end{pmatrix}.$$

我们在 3.3 段的例 2 已经看到，满足 $\tau=ck$ 的曲线就是一般螺线. 现在，我们找到了它的解的一般表示式，即(5.16). 但是对于任意曲率函数 $k(s)$，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 前面的系数常常难以表成初等函数.

更特殊些，若 k 和 τ 都是常数，则解曲线(5.16)便能按照初等函数而表成

$$\boldsymbol{r}(s)=\frac{-1}{\omega^2k}\{(\cos\omega ks)\boldsymbol{a}+(\sin\omega ks)\boldsymbol{b}-(\omega kcs)\boldsymbol{f}\}+\boldsymbol{g}. \tag{5.18}$$

如果取 $\boldsymbol{g}=0$，$\{-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b},\boldsymbol{f}\}$ 作为空间直角坐标系的基向量 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，在此坐标系中(5.18)成为

$$\boldsymbol{r}(s)=\left\{\frac{1}{\omega^2k}\cos\omega ks,\ \frac{1}{\omega^2k}\sin\omega ks,\ \frac{c}{\omega}s\right\},$$

或

$$\boldsymbol{r}(s)=\{a\cos\bar{\omega}s,\ a\sin\bar{\omega}s,\ b\bar{\omega}s\}, \tag{5.19}$$

这里已置 $\bar{\omega}=\omega k,\quad a=\frac{1}{\omega^2k},\quad b=\frac{c}{\omega^2k},$

它们之间满足关系

$$a^2+b^2=\frac{1}{\omega^2}.$$

上述表示式和 3.3 段的例 1 的圆柱螺线方程是完全一致的，所以(5.18)是圆柱螺线。

如上所述，我们证明了：k 和 τ 都是常数的曲线必为圆柱螺线。若用曲线论的基本定理直接证明这一事实，计算就变得十分简单。事实上，我们在 3.3 段的例 1 中已经明确圆柱螺线的曲率 k 与挠率 τ 都是常数，且有关系式

$$\begin{cases} a=\dfrac{k}{k^2+\tau^2} \\ b=\dfrac{\tau}{k^2+\tau^2}. \end{cases} \tag{5.20}$$

这就是说，对任意一组给定的常数 $k(>0)$ 和 τ，通过(5.20)式便能找到一条以 k 为曲率和 τ 为挠率的圆柱螺线 H。可是从基本定理的系可知，我们所求的曲线和圆柱螺线 H 是合同的。

5.2 内在方程

曲线论基本定理告诉我们：一条曲线的形状完全决定于曲线的曲率和挠率关于弧长 s 的函数 $k(s)$ 和 $\tau(s)$。因此称

$$\begin{cases} k=k(s) \\ \tau=\tau(s) \end{cases} \tag{5.21}$$

为曲线的*内在方程*。

我们学过的用内在方程表示的曲线有：

(1) 直线：$k=0$（挠率无定义）；

(2) 圆：$k=$ 常数，$\tau=0$；

(3) 平面曲线：$k=k(s)$，$\tau=0$；

(4) 圆柱螺线：$k=$ 常数，$\tau=$ 常数；

(5) 一般螺线：$k=k(s)$，$\tau=ck(s)$（c 为非零常数）。

这里平面曲线是被视为空间曲线的特例而论的，只是它的曲率函数不带有条件 $k(s)>0$。在下一节，我们将引入平面曲线的"曲率"概念，以表达它的弯曲方向。

除了上述几个简单例子外，我们将在第七节给出一些比较复杂的内在方程，用以表示球面曲线和贝尔特朗曲线等常用空间曲线。

习　题　八

1．证明下列条件之一是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为一般螺线的充要条件：

(1) 混合积$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}', \boldsymbol{N}'')=0$；

(2) 混合积$(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}^{(4)})=0$。

2．证明曲线

$$\boldsymbol{r}=\left\{\frac{a}{c}\int_0^s \sin\theta(s)ds,\ \frac{a}{c}\int_0^s \cos\theta(s)ds,\ \frac{b}{c}s\right\}$$

是一般螺线，式中常数 $c^2=a^2+b^2$，$\dfrac{a}{c}\dfrac{d\theta}{ds}>0$。

3．在习题七第 2 题中，若曲线 C 的 $k=\tau$。试证明：曲线 C^* 与 C 合同。

4．已知曲线

$$C:\ \boldsymbol{r}=a\int \boldsymbol{g}(t)\times\dot{\boldsymbol{g}}(t)dt,$$

式中 a 为非零常数，$\boldsymbol{g}(t)$ 为不共面的单位向量函数，试证明：曲线 C 的 $k\neq 0$，$\tau=\dfrac{1}{a}$。

5．试证明上一题的逆命题：挠率 $\tau=\dfrac{1}{a}$（常数）的曲线 C 一定可以表成

$$\boldsymbol{r}=a\int \boldsymbol{g}(t)\times\dot{\boldsymbol{g}}(t)dt,$$

式中 $\boldsymbol{g}(t)$ 为不共面的单位向量函数。

5.3 小结

在平面几何中有这样的定理：已知三条边 a、b、c，其中任意两边之和大于第三边，便能决定一个三角形。这里讲"一个"，其确切含意是：(1) 存在性：存在三角形，它的三边长分别为 a、b、c；(2) 唯一性：若平面上两个同向三角形的对应边长分别相等，则可通过一个运动使它们重合。此时，也称这两个三角形合同(全等)。于是，三角形的三条边 a、b、c 便成为刻划一个三角形的形状的特征量。如果不计位置差别，它们就唯一地决定了一个三角形。

曲线论基本定理的内容，实际上同上述三角形的例子相仿。我们只要把"三角形"换成"曲线"，"三条边 a、b、c"换成"曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$"，把限制条件"两边之和大于第三边"换成"$k(s)>0$, $k(s)\in C^1$, $\tau(s)\in C^0$"，就成了曲线论基本定理。所不同的地方在于：前一个是整体的，而后一个是局部的。

在微分几何中，为了表示一条曲线的位置，常常用向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。然而，从这种形式一般看不出曲线的形状。比如，给出参数方程

$$\boldsymbol{r}=\{ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ be^t\},$$

如果不细算一下它的曲率

$$k=\frac{\sqrt{2}\,a}{s\sqrt{2a^2+b^2}}$$

和挠率

$$\tau=\frac{b}{s\sqrt{2a^2+b^2}}$$

(s 是弧长)，从而

$$\frac{\tau}{k}=\frac{b}{\sqrt{2}\,a}\quad(\text{为常数}),$$

恐怕不容易看出它是一条一般的螺线来.

既然一条曲线的曲率和挠率关于弧长的函数唯一地决定了曲线的形状,我们便称

$$\begin{cases} k=k(s) \\ \tau=\tau(s) \end{cases}$$

为曲线的内在方程,即:排除了位置的因素,而成为专一地描写曲线的实际形状的特征函数.

第六节　平 面 曲 线

从内在方程的角度考察,平面曲线的特征就是挠率

$$\tau(s)\equiv 0.$$

于是,一条平面曲线的形状完全决定于它的曲率函数

$$k=k(s),$$

这里 $k(s)>0$. 平面曲线自然可以看成空间曲线当 $\tau(s)\equiv 0$ 时的特例. 那末,关于平面曲线还有哪些方面值得专门研究的呢?

至少有下列三点考虑,促使我们需要专列一节讨论平面曲线.

(1) 特征地描述挠曲线形状的曲率函数 $k=k(s)$ 总为正,是不带负号的. 在平面的场合,我们能够引入带有符号的曲率 k_r, 用以表示曲线的弯曲方向, 而这是挠曲线所没有的.

(2) 和空间曲线不同,我们能够给出平面曲线的弗雷耐方程解的显式表示. 这样,便在描述形状的内在方程

$$k_r=k_r(s)$$

和表示位置的向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 之间建立更加密切的关系.

(3) 在工程技术中常用的几何曲线,极大多数是平面曲

线. 在机械工业的齿轮和凸轮设计、数控加工及计算机辅助几何设计领域中，平面曲线的拐点、平面曲线族的包络、等距曲线以及平面曲线的渐伸线和渐缩线等，都是经常使用的.

6.1 曲率

我们先看图 1-34 画的两个单位圆，其中右图把两个半圆接反了. 左图的弗雷耐标架比较简单：$\boldsymbol{T}$ 指向弧长增加方向，$\boldsymbol{N}$ 指向圆心，$\boldsymbol{B}$ 垂直于书本平面指向上空. 右图的 $\boldsymbol{T}$ 固然也是指向弧长增加方向，$\boldsymbol{N}$ 总是指向曲线的凹侧，但在 $s=\pi$ 处发生了麻烦：由于曲线在这点仅仅 C^1 连续，弗雷耐标架不复存在，而且此点两旁的 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别反向，不是连续变化. 更糟的是，这样两条形状迥异的曲线，其曲率 k 都等于 1（右图中除了 $s=\pi$ 一点外），它们的内在方程没有多少区别. 这说明，如果把空间曲线的弗雷耐标架简单地搬到平面曲线场合，就出现不能表示弯曲方向的问题.

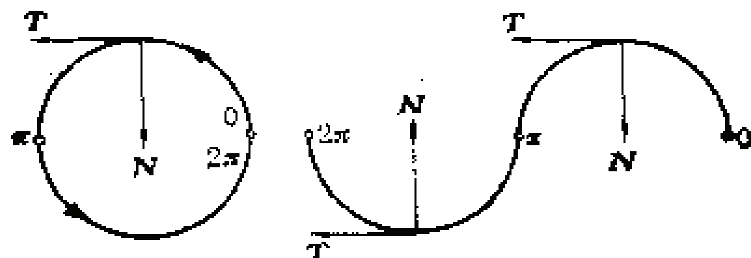


图 1-34

现在，我们设法改造弗雷耐标架和曲率函数如下：

(1) 因为从法向量 $\boldsymbol{B}$ 总是垂直于曲线所在的平面，可以取消.

(2) $\boldsymbol{T}$ 仍然指向弧长增加的方向.

(3) 定义向量 $\boldsymbol{N}_r(s)$，使得 $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}_r(s)\}$ 在每点 S 处成为单位正交右旋标架. 显然，有

$$N_r(s)=\varepsilon N(s),$$

这里 $\varepsilon=\pm1$. 两者的差别在于：N 总是指向曲线的凹侧；N_r 强调与 T 成右旋. $\{T(s), N_r(s)\}$ 称为平面曲线的弗雷耐标架.

(4) 定义平面曲线曲率

$$k_r(s)=\varepsilon k(s). \tag{6.1}$$

下面推导平面曲线的弗雷耐公式. 首先，由空间曲线的弗雷耐公式得出

$$T'=kN=(\varepsilon k_r)(\varepsilon N_r)=k_rN_r.$$

其次，在 $N'=-kT$ 两边乘 ε，则有 $N_r'=-k_rT$. 于是，平面曲线的弗雷耐公式为

$$\begin{cases}T'= & k_rN_r\\ N_r'= & -k_rT.\end{cases} \tag{6.2}$$

上述改造的实质性部分在于(3)、(4)两项：

$$N\to N_r,\quad k\to k_r,$$

使得 N_r 与 T 成右旋，k_r 带有正或负号，而且平面曲线的弗雷耐公式(6.2)仍然保持原有的样式.

图 1-35 画了一条按照曲率 k_r 和 $\{T, N_r\}$ 表示的平面曲线. 我们从 k_r 的正负号可清楚地看出曲线的凹凸变化. 在凹凸的转折点，$k_r=0$，称为曲线的拐点(图 1-35 中的 A、B 两点).

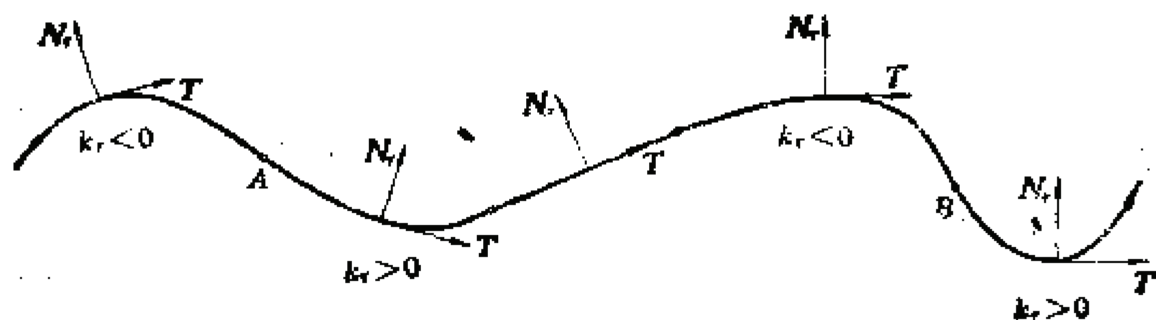


图 1-35

在计算几何中，为了构造适用于船舶、飞机和汽车的外形的那种光顺的曲线，就有必要严格地控制拐点的个数．因为一旦曲线上有了多余的拐点，曲线便会呈现波动，变得难看，不符合光顺性的要求．在这种场合，需要计算平面曲线曲率函数 $k_r(s)$ 的零点个数．一般说来，拐点个数就是主要的决定因素．

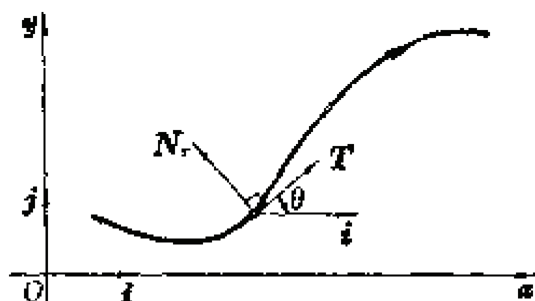


图 1-36

现在，我们给出 k_r 和 $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N}_r\}$ 的计算公式．

在平面直角坐标系 $\{0;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 中，设 $\boldsymbol{r}=\{x(s),\ y(s)\}$ 是弧长参数 s 表示的平面曲线，则

$$\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\{x'(s),\ y'(s)\}. \tag{6.3}$$

从 $\boldsymbol{i}$ 转向 $\boldsymbol{T}$ 的有向角记为 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$，称为切向量 $\boldsymbol{T}$ 的旋转角(图 1-36)．θ 是 s 的函数．今后，我们将这个函数 $\theta(s)$ 特征地描写平面弗雷耐标架 $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}_r(s)\}$ 的位置．

因为 $\boldsymbol{T}$ 是单位向量，它的分量可以表成

$$\begin{cases} x'(s)=\cos\theta, \\ y'(s)=\sin\theta. \end{cases} \tag{6.4}$$

按照定义，将 $\boldsymbol{T}$ 沿反时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，便是 $\boldsymbol{N}_r$(图 1-33)，它的分量是

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta=-y'(s);$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta=x'(s),$$

即

$$N_r = \{-y'(s),\ x'(s)\}. \tag{6.5}$$

于是，我们从平面弗雷耐公式(6.2)的第一式求得

$$k_r = T' \cdot N_r = x'y'' - x''y' = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

公式(6.3)、(6.5)和(6.6)便是一条平面曲线在其弧长 s 的表示下的弗雷耐标架 $\{T,\ N_r\}$ 和曲率 k_r 的表达式.

另一方面，对 $T = \{\cos\theta,\ \sin\theta\}$ 两边关于 s 求导，得到

$$T' = \frac{d\theta}{ds}\{-\sin\theta, \cos\theta\} = \frac{d\theta}{ds} N_r.$$

和弗雷耐公式(6.2)的第一式相比较的结果，得

$$k_r = \frac{d\theta}{ds}. \tag{6.7}$$

这就是说，平面曲线的曲率等于切向量 T 的旋转角 θ 关于弧长 s 的变化率.

我们把曲率的倒数称为平面曲线的**曲率半径**(包括符号)：

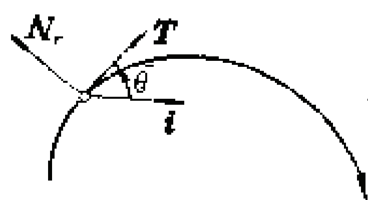
$$\rho = \frac{1}{k_r} = \frac{ds}{d\theta}.$$

在工程技术中，普遍用到曲率半径以代替曲率.

由此我们也可以看到，不但曲线的凹凸，还有弧长 s 的取向，都会影响着 k_r 的符号. 凡是弧长取定向的平面曲线，都称为**有向曲线**. 在空间曲线的场合，如上所述，我们无法定义其弯曲方向，所以从一开始就取定曲率 $k>0$.

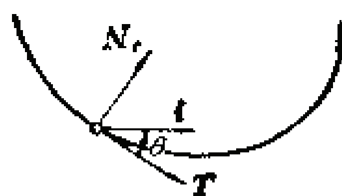
利用(6.7)式，立即可以判断：图 1-37 中两段曲线的 k_r 都为负，图 1-38 中两段曲线的 k_r 都为正.

从这两张图可以看出一个规律：若 N_r 和曲线同处于切向量 T 的一侧，$k_r>0$(图 1-38)；否则，$k_r<0$(图 1-37). 或者讲，曲线沿逆时针方向前进时，$k_r>0$；沿顺时针方向前进



$k_r<0$ 顺时针

图 1-37



$k_r>0$ 逆时针

图 1-38

时，$k_r<0$. 这是因为，(6.7)式表明 k_r 与 $d\theta$ 的正负号相同(ds 为正)，而有向角 θ 沿着逆时针方向转动为正，沿着顺时针方向转动为负.

在平面曲线的一个正常点 P，按照这点的曲率半径 ρ 的正负分别向 $\boldsymbol{N}_r$ 的正或负方向截取其上的一点 Q，使

$$\overline{PQ}=|\rho|.$$

称 Q 为曲率中心. 可以看出，Q 总是在曲线凹着的一侧.

下面我们推导曲率 k_r 在一般参数 t 表示下的表示式：

设曲线为

$$\boldsymbol{r}=\{x(t),\ y(t)\},$$

那末切向量

$$\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\{\dot{x}(t),\ \dot{y}(t)\}\frac{dt}{ds}. \tag{6.8}$$

参照(6.3)～(6.5)，便得

$$\boldsymbol{N}_r=\{-\dot{y}(t),\ \dot{x}(t)\}\frac{dt}{ds}. \tag{6.9}$$

对(6.8)两边关于弧长 s 求导：

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\{\ddot{x},\ \ddot{y}\}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\{\dot{x},\ \dot{y}\}\frac{d^2t}{ds^2}. \tag{6.10}$$

从(6.8)式得到

$$\left|\frac{ds}{dt}\right|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}. \tag{6.11}$$

在以后的计算中，我们总是假定弧长 s 与参数 t 有相同的取向，即 $\frac{ds}{dt}>0$，因此(6.11)式成为

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}. \tag{6.12}$$

从(6.9)、(6.10)、(6.12)，我们得到曲率 k_r 在一般参数 t 表示下的表示式：

$$\begin{aligned}k_r&=\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\cdot\boldsymbol{N}_r=(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\\&=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x}&\dot{y}\\\ddot{x}&\ddot{y}\end{vmatrix}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{6.13}$$

对于按照显函数 $y=f(x)$ 表示的平面曲线，它的参数形式是

$$\boldsymbol{r}=\{x,\ f(x)\},$$

这时 $\dot{x}=1$, $\ddot{x}=0$，从(6.13)得

$$k_r=\frac{\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}. \tag{6.14}$$

当平面曲线以极坐标形式 $r=r(\theta)$ 给出时，我们把它写成参数方程形式

$$\begin{cases}x(\theta)=r(\theta)\cos\theta\\y(\theta)=r(\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

依次求出它们关于 θ 的一阶和二阶导数，代入(6.13)式，便得到曲率在极坐标形式下的表示式

$$k_r = \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{6.15}$$

(6.15)式的具体推导留给读者作为习题.

【例 1】 求旋轮线

$$\boldsymbol{r} = \{a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t)\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的曲率.

解:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \{a(1 - \cos t),\ a\sin t\},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \{a\sin t,\ a\cos t\},$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}| = a\sqrt{2 - 2\cos t}.$$

曲率为

$$k_r = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3} = \frac{\begin{vmatrix} a(1-\cos t) & a\sin t \\ a\sin t & a\cos t \end{vmatrix}}{a^3(2 - 2\cos t)^{3/2}}$$

$$= \frac{-1}{4a\sin\frac{t}{2}}.$$

在 $t \neq 0$ 的点处 $k_r < 0$，所以上图中的旋轮线除了两端以外，不具有拐点(图 1-39).

【例 2】 求阿基米德螺线 $r = a\theta (0 \leqslant \theta < \infty,\ a > 0)$ 的曲率.

解: $\dot{r} = a,\quad \ddot{r} = 0,$

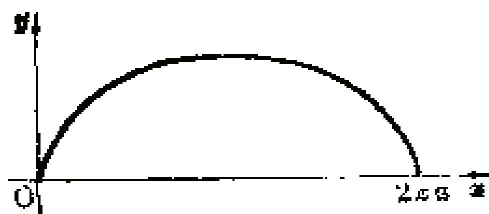


图 1-39

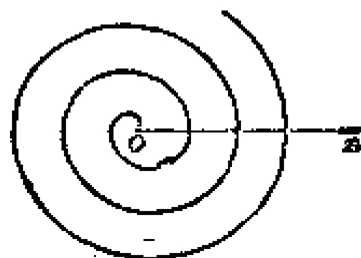


图 1-40

按照公式(6.15)，曲率

$$k_r=\frac{2\dot{r}^2-r\ddot{r}+r^2}{(\dot{r}^2+r^2)^{3/2}}=\frac{2+\theta^2}{a(1+\theta^2)^{3/2}}.$$

从 $k_r>0$ 知，阿基米德螺线上无拐点，呈逆时针的螺旋状(图 1-40)。

*【例 3】 讨论下列平面三次参数曲线的拐点个数：

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}_3t^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2t^2+\boldsymbol{a}_1t+\boldsymbol{a}_0 \quad (-\infty<t<+\infty), \tag{6.16}$$

式中 $\boldsymbol{a}_i(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$都是平面向量，$\boldsymbol{a}_3\neq 0$。

为了下面计算方便，我们在式中增添了系数 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{2}$.

在计算几何中，专门研究了怎样用一段一段的曲线拼接起来组成船、飞机和汽车等复杂的几何外形轮廓. 其中最常用的曲线段就是三次参数曲线，弄清楚它的拐点个数，对于设计光顺的几何外形有着特别重要的实际意义.

设向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在平面直角坐标系中的分量为

$$\boldsymbol{A}=\{\alpha_1,\ \alpha_2\},\quad \boldsymbol{B}=\{\beta_1,\ \beta_2\},$$

我们定义两个向量的楔积 $\wedge$：

$$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$$

是一个数量，代表以向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为邻边组成的平行四边形的有向面积. 容易验证，楔积运算是线性的和反称的：

$$\begin{cases}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{C}\\ \qquad =a(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C})+b(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C}) \quad (a、b\text{ 是数量})\\ \boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{A}=0,\end{cases} \tag{6.17}$$

而且还有下面的性质成立：

性质 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$.

首先，对(6.16)式两边关于 t 接连求导两次：

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_3t^2+\boldsymbol{a}_2t+\boldsymbol{a}_1,$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{a}_3t+\boldsymbol{a}_2.$$

由(6.17)式可见：

$$\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_2\wedge\boldsymbol{a}_3)t^2-(\boldsymbol{a}_3\wedge\boldsymbol{a}_1)t+(\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2)$$

$$=\frac{1}{2}(pt^2-2qt+2r),$$

式中已置

$$p=\boldsymbol{a}_2\wedge\boldsymbol{a}_3,\quad q=\boldsymbol{a}_3\wedge\boldsymbol{a}_1,\quad r=\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2. \tag{6.18}$$

我们由此算出曲率的表示式：

$$k_r=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}=\frac{1}{2|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}(pt^2-2qt+2r). \tag{6.19}$$

曲线的拐点方程 $k_r=0$ 是二次代数方程

$$pt^2-2qt+2r=0.$$

现在分几种情形讨论：

1°. $p=0$.

(1) $q=0$. 从楔积的性质和(6.18)式导出

$$\boldsymbol{a}_1\parallel\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{a}_2\parallel\boldsymbol{a}_3.$$

因为 $\boldsymbol{a}_3\neq0$, 所以

$$\boldsymbol{a}_1=\alpha\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{a}_2=\beta\boldsymbol{a}_3.$$

此时，(6.16)式表示一条直线.

(2) $q\neq0$. 这时曲线有唯一拐点，对应于参数

$$t=\frac{r}{q}.$$

2°. $p\neq 0$.

拐点方程的判别式是

$$I=q^2-2pr.$$

(1) $I>0$ 时，有两个拐点：

$$t=\frac{q\pm\sqrt{I}}{p}.$$

(2) $I=0$ 时，是一个"二重拐点"，实际上是一个尖点：

$$t=\frac{q}{p}.$$

(3) $I<0$ 时，无拐点. 在作进一步的分析后，可知这时曲线上存在一个称为"二重点"的奇点.

图 1-41 画了上述几种情况的曲线图，也就是平面三次参数曲线按照拐点和奇点为特征的分类图.

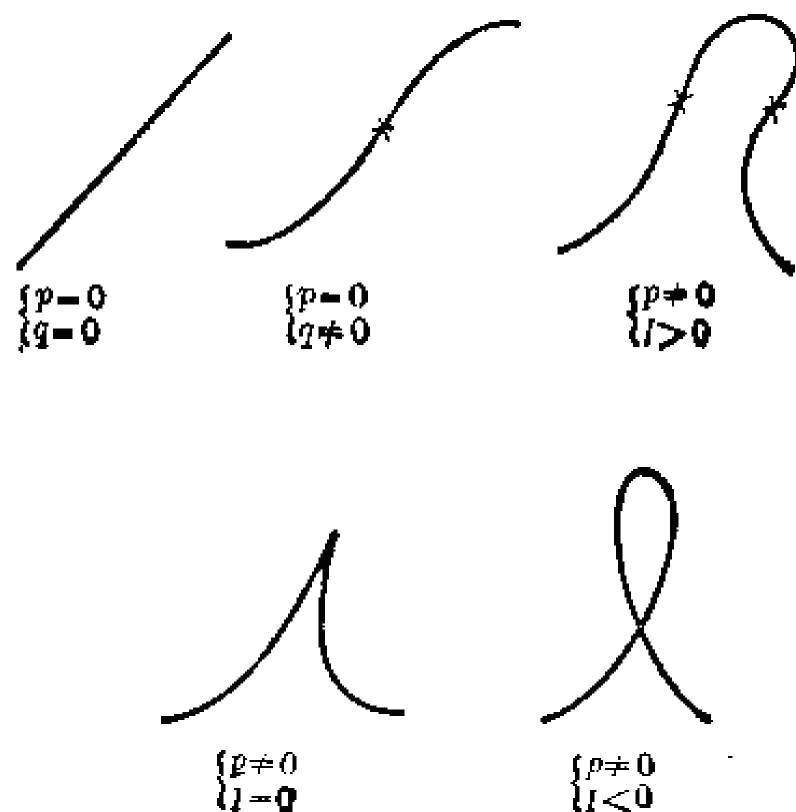


图 1-41

为了应用的需要，进一步要做的工作，是对三次参数曲线段即限制(6.16)式在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的情况分析它的拐点个数. 详见苏步青、刘鼎元:《计算几何》，上海科学技术出版社，1981年.

上述理论分析已经成功地应用到我国的造船、航空和汽车等工业部门的外形设计和制造工作中.

习　题　九

1. 证明平面曲线在极坐标表示的方程 $\rho=\rho(\varphi)$ 下的曲率表示式为
$$k_r=\frac{2\dot{\rho}^2-\rho\ddot{\rho}+\rho^2}{(\dot{\rho}^2+\rho^2)^{3/2}}.$$

2. 算出下列各平面曲线的曲率 k_r 的表示式:

(1) 椭圆　$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ b\sin t\}$　$(0\leqslant t<2\pi)$;

(2) 双曲线　$\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch} t,\ b\operatorname{sh} t\}$;

(3) 抛物线　$y=x^2$;

(4) 悬链线　$y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$;

(5) 曳物线
$$\boldsymbol{r}=\left\{a\sin\varphi,\ -a\left(\cos\varphi+\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right\}\quad\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right);$$

(6) 对数螺线　$\rho=ae^{k\varphi}$;

(7) 星形线　$\boldsymbol{r}=\{a\cos^3 t,\ a\sin^3 t\}$.

6.2 基本定理

我们在上一段得到的平面曲线的弗雷耐公式
$$\begin{cases}\boldsymbol{T}'= & k_r\boldsymbol{N}_r\\ \boldsymbol{N}_r'=-k_r\boldsymbol{T}\end{cases}\tag{6.20}$$
以及相应的基本定理，是作为空间曲线基本定理在 $\tau=0$ 时的特例来看的. 在本段中，将直接导出这些结果，以便于更多地

表示平面曲线的特点．特别需要指出：当给定了平面曲线的曲率函数 $k_r(s)$ 时，我们容易求出平面曲线的显式解．

基本定理 在区间 $[0, L]$ 上任意给定了一个连续函数 $k_r(s)$ 以及初始点 $\boldsymbol{r}_0$ 和初始倾斜角 $\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，则唯一存在一条正则平面曲线

$$C: \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),\ y(s)\} \quad (0\leqslant s\leqslant L), \tag{6.21}$$

使它的弧长为 s，曲率为 $k_r(s)$，而且满足初始条件 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}_0$ 和切向量 $\boldsymbol{T}(0)$ 的旋转角 $\theta(0)=\theta_0$．

【证】 首先假定有这么一条曲线 C，它的曲率

$$k_r=k_r(s),$$

且满足上列初始条件．

我们对(6.7)式两边施行一次积分，注意到初始旋转角为 θ_0，于是曲线 C 的旋转角

$$\theta(s)=\int_0^s k_r(s)ds+\theta_0. \tag{6.22}$$

将上式代入(6.4)式，再积分一次，并设初始位置

$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,\ y_0\},$$

便得

$$\begin{cases} x(s)=\int_0^s \cos\theta(s)ds+x_0 \\ y(s)=\int_0^s \sin\theta(s)ds+y_0. \end{cases} \tag{6.23}$$

上式便是曲线 C 的唯一的表示(唯一性)．

其次，经过直接验算不难证明，按照(6.23)式表示的曲线 C 确实就是所要找的平面曲线(存在性)．整个验算过程无非是把上述积分过程颠倒过来，依次证明：

(1) s 是曲线 C 的弧长；

(2) $\theta(s)$ 是切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 的旋转角；

(3) 曲线 C 的曲率 $k_r=k_r(s)$;

(4) 满足初始条件 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}_0$, $\theta(0)=\theta_0$.

读者可自行证明,此处从略.

同样,可以证明:按照曲率函数 $k_r=k_r(s)$, 便能唯一决定一条平面曲线的形状.

6.3 内在方程

上一段中平面曲线论基本定理告诉我们:一条平面曲线的形状完全被曲线的曲率关于弧长的函数 $k_r(s)$ 所唯一决定. 因此,与空间曲线相仿,也有平面曲线的内在方程

$$k_r=k_r(s). \tag{6.24}$$

在平面曲线的场合,表示一条曲线也有两种形式:

(1) 表示位置: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$;

(2) 表示形状: $k_r=k_r(s)$.

我们把这两者的关系直观地写成下列形式:

内在方程 $k_r=k_r(s)$ ⊕ 初始位置 $\boldsymbol{r}_0$ 和初始切向量旋转角 θ_0 $\xrightarrow{\text{积分两次}}$ 位置向量表示式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),\ y(s)\}$.

这个关系同空间曲线场合的关系相仿,但是更进了一步:能通过两次积分即(6.22)和(6.23)式解出 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的显式表示. 这两次积分过程实际上就是解平面曲线的弗雷耐方程的过程.

【例 1】 求 $k_r=$ 常数 a 的平面曲线.

解: 从(6.22)求得切线旋转角

$$\theta(s)=\int_0^s k_r\,ds+\theta_0=as+\theta_0.$$

如果 $a=0$, 那末所求的是直线. 因此, 我们只讨论 $a\neq 0$ 的情况. 从(6.23)求得

$$\begin{cases} x(s)=\int_0^s \cos(as+\theta_0)ds+x_0=\frac{1}{a}\sin(as+\theta_0)+x_0 \\ y(s)=\int_0^s \sin(as+\theta_0)ds+y_0=-\frac{1}{a}\cos(as+\theta_0)+y_0. \end{cases}$$

容易看出，所求的是半径为 $\frac{1}{a}$ 的圆.

【例 2】 求曲率半径等于弧长的平面曲线.

解：曲线的内在方程为

$$k_r=\frac{1}{s}.$$

当取 $s=0$ 时，$k_r=\infty$ 是奇点，因此我们在作积分时，把积分下限取在 $s_0(>0)$ 处，即曲线从 s_0 计算起.

从(6.22)求切线旋转角，而且不妨取 $\theta(s_0)=0$，则

$$\theta=\int_{s_0}^s k_r\,ds=\int_{s_0}^s \frac{ds}{s}=\ln\frac{s}{s_0}.$$

求出反函数 $$s=s_0e^\theta.$$

我们从(6.23)求得曲线 C 的参数方程($ds=s_0e^\theta\,d\theta$)：

$$\begin{cases} x=\int_{s_0}^s \cos\theta\,ds=s_0\int_0^\theta e^\theta\cos\theta\,d\theta \\ \qquad=\frac{\sqrt{2}}{2}s_0e^\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{s_0}{2} \\ y=\int_{s_0}^s \sin\theta\,ds=s_0\int_0^\theta e^\theta\sin\theta\,d\theta \\ \qquad=\frac{\sqrt{2}}{2}s_0e^\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{s_0}{2}, \end{cases} \tag{6.25}$$

这里已取初始位置 $r_0=\{0,\ 0\}$.

然后，作参数变换

$$\varphi=\theta-\frac{\pi}{4},$$

从(6.25)便得曲线 C 的极坐标方程

$$\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}s_0e^{\theta+\frac{\pi}{4}}.$$

它表示一条对数螺线。图 1-42 示意了极坐标的极点和极轴与原直角坐标系之间的相互位置。

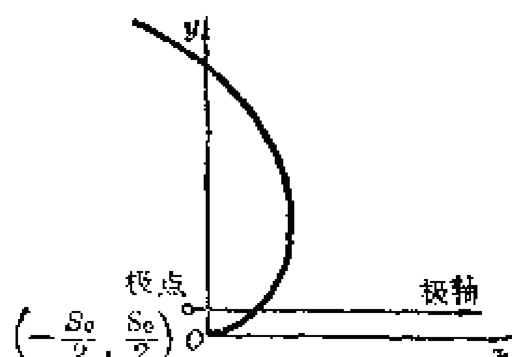


图 1-42

用同样的方法可以证明内在方程为

$$k_r=\frac{1}{as+b}$$

即曲率半径 $\frac{1}{k_r}$ 关于弧长呈线性变化的曲线也是对数螺线，这一证明作为习题留给读者。

【例 3】 求内在方程 $k_r=as+b$ 的平面曲线。

解：首先，从(6.22)求切向量旋转角

$$\theta=\int_0^s k_r ds+\theta_0=\int_0^s (as+b)ds+\theta_0=\frac{1}{2}as^2+bs+\theta_0.$$

再从(6.23)求得曲线 C 的参数方程

$$C:\ \begin{cases} x=\int_0^s \cos\left(\frac{1}{2}as^2+bs+\theta_0\right)ds+x_0 \\ y=\int_0^s \sin\left(\frac{1}{2}as^2+bs+\theta_0\right)ds+y_0. \end{cases}$$

式中的积分是无法表示成初等函数的。如有必要，可以通过数值积分求取近似值。当取 $x_0=y_0=0$ 时，曲线 C 的图形如图 1-43 所示，称为羊角螺线(Cornu)，或者“回旋曲线”。照片 1-44 中一只公羊的双角呈相仿的螺旋形，也许是名称的由来。

从例 1 看到，最简单的内在方程，即 k_r 为常数，决定了圆(包括直线)，稍为复杂些的，应当是 k_r 关于弧长成线性

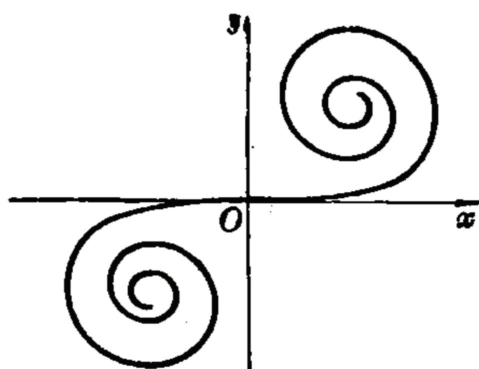


图 1-43



图 1-44

变化的方程，它决定了羊角螺线．但例2表明：当 k_r 关于弧长 s 的倒数成线性变化时，反而是方程形式较为简单的对数螺线．这是预料不到的．

尽管如此，羊角螺线因其曲率与弧长成线性关系而在计算几何中占有重要的理论地位．实际上，为了表示船、飞机、汽车的线型，需要寻找光顺的曲线段，即所谓漂亮的曲线段，然后把它们拼接起来．实践证明，当一条平面曲线的曲率均匀变化时，就会有一种美感．事实上，最均匀的变化要算是线性关系．因此，在计算几何中，便把一段段羊角螺线按照 C^2 连续条件连接起来，使成为所谓“几何样条”的曲线，以表示物体的光顺线形．

在公路的平面线形设计课题中，用来表示一条公路线形的曲线，除了直线和圆弧外，羊角螺线是基本的线形要素，最近在这方面已经达到广泛应用的阶段．事实表明，当汽车匀速行驶时，假定方向盘是以等速转动，那末汽车行驶的轨迹就是一段羊角螺线．因此，设计羊角螺线式的公路线形，会给司机带来舒适感，提高行车的安全率．

【例 4】 若一条平面曲线 C 的位置向量 $\boldsymbol{r}(s)$ 同它的切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 处处相交于定角，则 C 必为对数螺线.

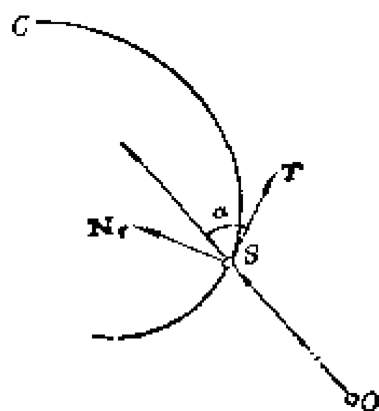


图 1-45

解：设 C 以弧长 s 表示的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s).$$

我们把位置向量 $\boldsymbol{r}(s)$ 作为向量分解到曲线 C 在 S 处的弗雷耐标架上(图 1-45)：

$$\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|(\cos\alpha\boldsymbol{T}+\sin\alpha\boldsymbol{N}_r).$$

由已知条件，常数 α 是 $\boldsymbol{r}(s)$ 与 $\boldsymbol{T}(s)$ 所交的定角. 从上式得出

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha\\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N}_r=|\boldsymbol{r}|\sin\alpha.\end{cases}\tag{6.26}$$

将(6.26)的第一式两边对 s 求导，并注意到

$$\frac{d|\boldsymbol{r}|}{ds}=\frac{d\sqrt{\boldsymbol{r}^2}}{ds}=\frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{2\sqrt{\boldsymbol{r}^2}}=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{r}|}=\cos\alpha,$$

便得
$$1+k_r\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N}_r=\cos^2\alpha.$$

继续对 s 求导：

$$k_r'\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N}_r-k_r^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}=0.$$

再把(6.26)代入上式，并消去因子 $|\boldsymbol{r}|$，得到

$$\frac{dk_r}{ds}=-ak_r^2,$$

这里已置常数 $a=-\operatorname{ctg}\alpha$. 解此常微分方程，得到曲线 C 的曲率

$$k_r=\frac{1}{as+b},$$

式中 b 为积分常数．按照习题十的第 2(3) 题的结论，曲线 C 为对数螺线．

【例 5】 对数螺线 $\rho=ce^{a\varphi}$ 的位置向量同曲线的切向量处处相交于定角．

【证】 把极坐标改为直交坐标，

$$\boldsymbol{r}=ce^{a\varphi}\{\cos\varphi,\ \sin\varphi\}.$$

两边对 φ 求导：

$$\dot{\boldsymbol{r}}=ce^{a\varphi}\{-\sin\varphi,\ \cos\varphi\}+ace^{a\varphi}\{\cos\varphi,\ \sin\varphi\}.$$

从此，

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=a(ce^{a\varphi})^2.$$

再求弧长：

$$|\boldsymbol{r}|=ce^{a\varphi},$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=ce^{a\varphi}\sqrt{1+a^2}.$$

于是

$$\cos\widehat{\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}}=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}||\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

为常数，所以 $\boldsymbol{r}$ 与 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 恒交于定角．】

习 题 十

1．求下列各曲线的内在方程：

(1) 旋轮线 $\boldsymbol{r}=a\{t-\sin t,\ 1-\cos t\}$；

(2) 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$；

(3) 对数螺线 $\rho=ce^{a\varphi}$．

2．已知下列内在方程和初始条件，决定其相应的平面曲线：

(1) $k_r=\dfrac{a}{a^2+s^2}$，$\theta_0=0$，$x_0=0$，$y_0=0$；

(2) $k_r=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-s^2}}$，$\theta_0=0$，$x_0=0$，$y_0=0$；

(3) $k_r=\dfrac{1}{cs+b}$，$\theta_0=0$，$x_0=0$，$y_0=0$；

(4) $k_r=\dfrac{1}{\sqrt{2as}}$，$\theta_0=0$，$x_0=a$，$y_0=0$．

6.4 平面曲线族的包络

在机械传动机构中，齿轮和凸轮是基本的传动部件．图 1-46 是一对啮合齿轮的照片．

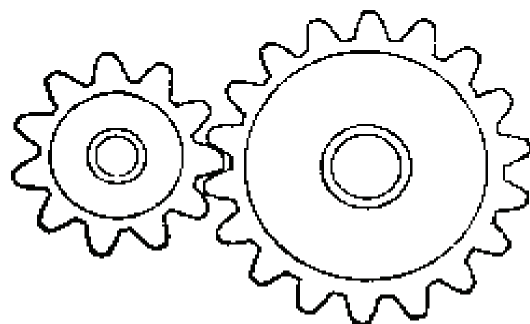


图 1-46

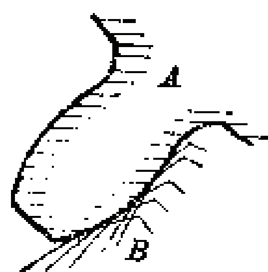


图 1-47

为了弄清齿轮啮合传动原理，我们把照相机固定在齿轮 A 上，随 A 一起转动，并且定时地开启几次快门，便摄下齿轮 B 的一串照片(图 1-47)．我们将 B 的齿廓看成平面上的一族曲线，A 的齿廓曲线在每个接触点同这族曲线相切，工程上称它为曲线族 B 的包络——好象是它把曲线族光滑地包起来似的．

用平面数控铣床(或者靠模铣床)加工凸轮 A，如果把铣刀看做一个半径为 a 的圆盘，圆心沿着一条平面曲线 L 运动，那末铣刀切削出凸轮 A 的轮廓曲线 C，就是曲线族 B 的包络(图 1-48)．这时族 B 是由同一半径的圆构成的．

定义 对于给定的平面曲线族 $\{C_\lambda\}$，若存在曲线 C，使得 C 与族中某一条曲线 C_λ 相切于一点，则称 C 是曲线族 $\{C_\lambda\}$ 的包络线，简称包络(图 1-49)．

设给定的曲线族方程为

$$C_\lambda:\ F(x, y, \lambda)=0, \tag{6.27}$$

这里 (x, y) 表示曲线 C_λ 上一点的坐标，λ 是参数．下面给出

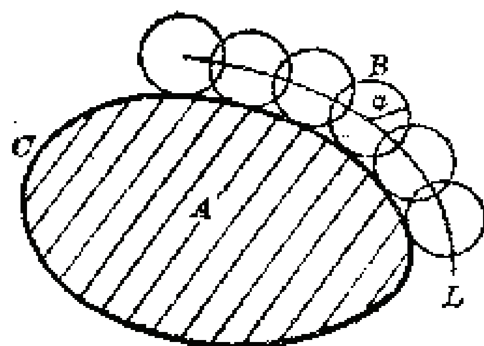


图 1-48

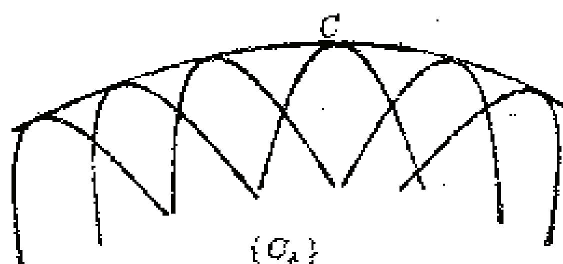


图 1-49

包络线 C 的求法。

由定义，对于每个 λ，可找到 C 上的一点 $\{x, y\}$，使得 C 与 C_λ 切于该点，从而有下列函数关系成立：

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda). \end{cases} \tag{6.28}$$

由于切点 $\{x(\lambda), y(\lambda)\}$ 也落在曲线 C_λ 上，将其坐标分量代入(6.27)，便是恒等式

$$F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) \equiv 0.$$

两边关于 λ 求导：

$$F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_\lambda \equiv 0, \tag{6.29}$$

式中
$$\dot{x} = \frac{dx}{d\lambda}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\lambda},$$

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_\lambda = \frac{\partial F}{\partial \lambda}.$$

当 λ 变动时，(6.28)表示包络线 C 的参数方程，$\{\dot{x}, \dot{y}\}$ 表示 C 在 λ 点的切向量．可是 $\{F_x, F_y\}$ 是对应曲线 C_λ 在该点处的法向量，所以在点 $\{x(\lambda), y(\lambda)\}$ 垂直于切向量 $\{\dot{x}, \dot{y}\}$，即

$$F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = 0.$$

将上式代入(6.29)，便有

$$F_\lambda(x, y, \lambda)=0.$$

综上所述，我们求得包络线 C 满足的方程

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda)=0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda)=0. \end{cases} \tag{6.30}$$

从中消去参数 λ，可以得到包络线 C 的隐函数方程

$$\Phi(x, y)=0.$$

或者，从(6.30)求解，便有包络线 C 的参数方程(6.28)。

【例 1】 设一条定长线段的端点各沿直角坐标系的两轴移动，求这线段族的包络线。

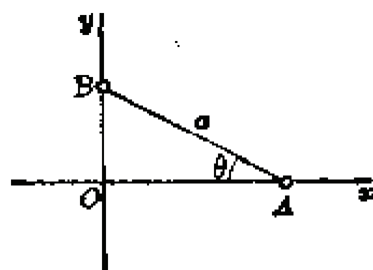


图 1-50

解：设定长 a 的线段与 x 轴交于 θ 角，其两端点坐标为 $A\{a\cos\theta, 0\}$ 和 $B\{0, a\sin\theta\}$ (图 1-50)。因为这线段随着 θ 的变化而移动，所以对应的线段族的方程为

$$C_\theta:\ F(x, y, \theta)\equiv a\sin\theta\cdot x+a\cos\theta\cdot y-a^2\sin\theta\cos\theta$$
$$=0 \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

这里 θ 是参数。将上式对 θ 求导：

$$F_\theta\equiv a\cos\theta\cdot x-a\sin\theta\cdot y-a^2\cos 2\theta.$$

C_θ 的包络线方程为

$$\begin{cases} F(x, y, \theta)=0 \\ F_\theta(x, y, \theta)=0. \end{cases}$$

由此解得包络线 C 的参数方程

$$C:\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

消去参数 θ，便得 C 的隐函数方程

$$C:\ \Phi(x, y)\equiv x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0.$$

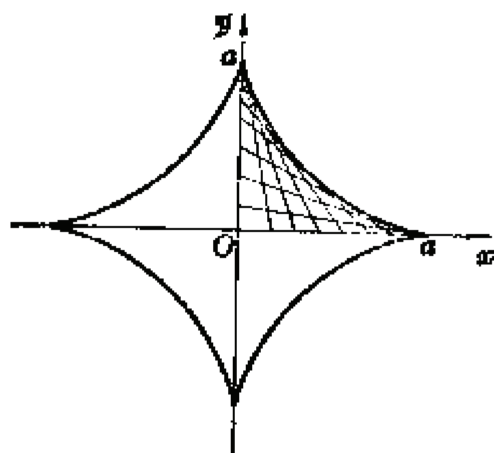


图 1-51

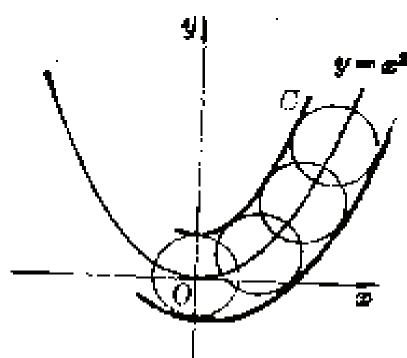


图 1-52

如所知，C 是一条星形线(图 1-51)。

【例 2】 设一个圆族的圆的半径为 a，且圆心在抛物线 $y=x^2$ 上．求它的包络线．

解：容易知道，族中的任何一个圆的方程为

$$C_\lambda:\quad F(x,\ y,\ \lambda)\equiv(x-\lambda)^2+(y-\lambda^2)^2-a^2=0.$$

将上式对 λ 求导：

$$F_\lambda(x,\ y,\ \lambda)\equiv-2(x-\lambda)-4\lambda(y-\lambda^2).$$

所以圆族 $\{C_\lambda\}$ 的包络线为

$$C:\quad \begin{cases} F=0 \\ F_\lambda=0, \end{cases}$$

从此解得 C 的参数方程

$$C:\quad \begin{cases} x=\lambda-\dfrac{2a\lambda}{\sqrt{1+4\lambda^2}} \\ y=\lambda^2+\dfrac{a}{\sqrt{1+4\lambda^2}}. \end{cases}$$

消去参数 λ 后，我们看到 C 是一条高次代数曲线，其图形如图 1-52 所示．

上例告诉我们：半径为 a 的圆盘铣刀，其中心即使沿着

象抛物线那样简单的曲线运动，它所切削出来的曲线 C 也是相当复杂的．要是不经过计算，随随便便向图 1-52 看一眼，很可能认为包络线 C 只不过是对抛物线 $y=x^2$ 作一些平移而得来的．

包络线，特别是圆族和直线族的包络线，在机械工程中有着广泛的应用．

我们从图 1-48 看到，已知铣刀 B 的半径 a 和运动轨迹 $\mathscr{L}$，按照包络线方程(6.30)，便能求得凸轮 A 的轮廓曲线 C．但是在机械制造工艺中经常遇到的是反问题：已知工件 A 的轮廓曲线 C 和铣刀半径 a，求铣刀中心的运动轨迹 $\mathscr{L}$．

如图 1-53 所示，设半径为 a 的圆与曲线 C 相切于 P 点，它们在 P 点有相同的切向量 $\boldsymbol{T}$ 和法向量 $\boldsymbol{N}_r$，这里 $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_r\}$ 是曲线 C 在 P 点的弗雷耐标架，而且圆心 O 落在 P 点的法线上，$\overline{OP}=a$．当 P 沿着曲线 C 运动时，对应的圆心 O 的全体构成曲线 $\mathscr{L}$．由此，我们得出：

定义 已知平面曲线 C:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

弗雷耐标架 $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}_r(s)\}$，称曲线

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*(s)=\boldsymbol{r}(s)+a\boldsymbol{N}_r(s) \tag{6.31}$$

为曲线 C 的等距曲线，式中常数 a 称为 C 和 C^* 的间距(图 1-54)．

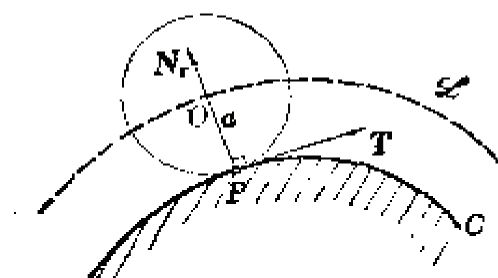


图 1-53

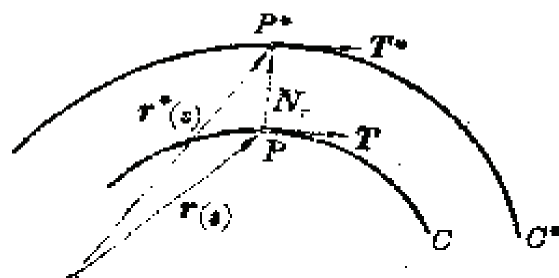


图 1-54

在定义中，两条曲线 C 和 C^* 之间存在点的一一对应关系：

$$P \to P^*.$$

P 和 P^* 的位置向量分别是 $\boldsymbol{r}(s)$ 和 $\boldsymbol{r}^*(s)$. 即取 s 为 C 的弧长参数，它一般不会是 C^* 的弧长参数 s^*.

将(6.31)两边对 s 求导：

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+a\frac{d\boldsymbol{N}_r}{ds}.$$

或者写成

$$\boldsymbol{T}^*\frac{ds^*}{ds}=(1-ak)\boldsymbol{T}, \tag{6.32}$$

其中 $\boldsymbol{T}^*$ 是曲线 C^* 在 P^* 点的单位切向量. 这表明 C^* 与 C 在对应点 P^* 与 P 处的切线平行，它们有公共法线 PP^*，而且

$$\overline{PP^*}=|\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}|=|a\boldsymbol{N}_r|=|a|.$$

当然，我们在一般的点 P 要假定 C 的曲率半径

$$\frac{1}{k}\neq a,$$

否则，在对应点 P^* 的切线将变为不定.

这样，我们有：

性质 1 平面曲线 C 和它的等距曲线 C^* 在对应点的连线 PP^* 是 C 和 C^* 的公共法线，且

$$\overline{PP^*}=|a|.$$

我们不妨把 $\overline{PP^*}$ 理解成曲线 C 和 C^* 之间的"法向距离"，处处等于常数 $|a|$. 这就是"等距曲线"名称的由来.

容易看出，等距曲线的定义是对称的：若 C^* 是 C 的等距曲线，则 C 也是 C^* 的等距曲线.

曲线 C 存在一族等距曲线，族的参数是 a. 在 $a>0$ 时，

C^* 在 C 的 $\boldsymbol{N}_r$ 正侧；在 $a<0$ 时，C^* 在 C 的另一侧.

现在，为了解决图 1-53 表示的数控加工反问题，我们推导出：

性质 2 半径为 a，圆心落在曲线 $\mathscr{L}$ 上的圆族 C_s 的包络线有两条，它们是与 $\mathscr{L}$ 间距为 a 的两条等距曲线.

设 s 是曲线 $\mathscr{L}$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的弧长参数. 圆族 C_s 的隐函数方程为

$$F(x,\ y,\ s)\equiv(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{r}(s))^2-a^2=0, \tag{6.33}$$

式中 $\boldsymbol{P}=\{x,\ y\}$ 代表 C_s 上一个动点的位置向量. 将上式对 s 求导：

$$F_s\equiv2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{r})\cdot(-\boldsymbol{T})=0. \tag{6.34}$$

联合(6.33)和(6.34)，解得包络线 C 的参数方程为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(s).$$

具体说来，把向量 $\boldsymbol{P}(s)-\boldsymbol{r}(s)$ 分解在活动标架 $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}_r(s)\}$ 上，即

$$\boldsymbol{P}(s)-\boldsymbol{r}(s)=\alpha(s)\boldsymbol{T}(s)+\beta(s)\boldsymbol{N}_r(s).$$

在上式两边点乘 $\boldsymbol{T}(s)$，注意(6.34)，便得 $\alpha(s)=0$. 于是上式成为

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{r}=\beta\boldsymbol{N}_r. \tag{6.35}$$

两边平方后，再与(6.33)比较，便导得

$$\beta=\pm a.$$

代入(6.35)，即得包络线的方程如下：

$$C_1:\ \ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}(s)+a\boldsymbol{N}_r(s),$$

$$C_2:\ \ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}(s)-a\boldsymbol{N}_r(s).$$

参见图 1-55.

【例 3】 求抛物线 $\boldsymbol{r}=\{t,\ t^2\}$ 的等距曲线.

解：弗雷耐标架为

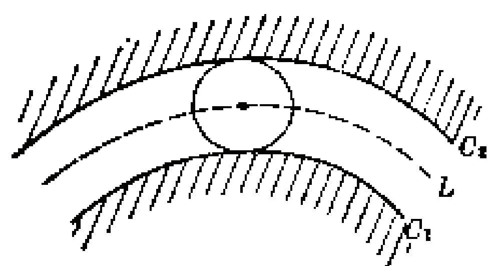


图 1-55

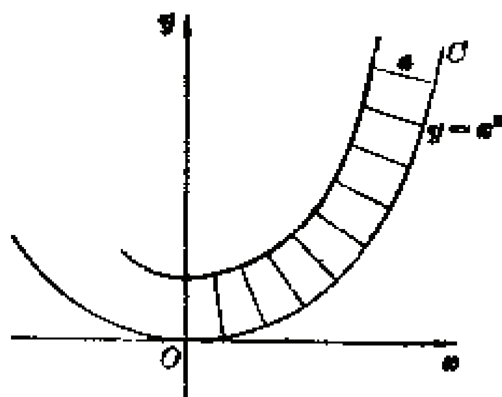


图 1-56

$$T=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\{1,\ 2t\},$$

$$N_r=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\{-2t,\ 1\}.$$

因此等距曲线决定于方程

$$C^*:\ r^*(t)=r(t)+aN_r(t)$$

$$=\left\{t\left(1-\frac{2a}{\sqrt{1+4t^2}}\right),\ t^2+\frac{a}{\sqrt{1+4t^2}}\right\}.$$

C^* 不是抛物线(图 1-56). 这就是说，一条曲线的等距曲线一般不是自身的平移. 有时,人们称等距曲线为“平行曲线”,因为在对应点的两条切线互相平行.

容易看出,直线的等距曲线是平行直线,圆的等距曲线是同心圆,但半径不相等.

习 题 十 一

1. 设半径 r 的动圆的中心位于椭圆 $r=\{a\cos\theta,\ b\sin\theta\}$ 上,求它的包络线.
2. 设已知直线族

$$l_\theta:\ F(x,\ y,\ \theta)=x\cos\theta+y\sin\theta-p(\theta)=0,$$

式中 $p\geqslant0$, θ 是参数.

(1) 求 l_θ 的包络线 C;

(2) 证明 C 的曲率半径 $R=p(\theta)+\frac{d^2p(\theta)}{d\theta^2}$;

(3) 若 $p(\theta)$ 为周期 2π 的周期函数，则包络线为闭曲线，证明 C 的周长

$$L=\int_0^{2\pi}p(\theta)d\theta.$$

3．设半径 a 的动圆的中心位于曲线

$$\boldsymbol{r}=\left\{t\left(1-\frac{2a}{\sqrt{1+4t^2}}\right),\ t^2+\frac{a}{\sqrt{1+4t^2}}\right\}$$

上，求这圆族的包络线；指出包络线有两条：一条是抛物线 $y=x^2$，一条是与 $y=x^2$ 间距为 $2a$ 的等距曲线．

4．求双曲线 C:

$$\boldsymbol{r}=\{\alpha\operatorname{ch}t,\ \beta\operatorname{sh}t\}\quad(\alpha、\beta\text{ 为常数})$$

的等距曲线 C^*.

5．求椭圆 C:

$$\boldsymbol{r}=\{\alpha\cos\theta,\ \beta\sin\theta\}\quad(\alpha、\beta\text{ 为常数})$$

的等距曲线 C^*．当 C 是半径为 R 的圆时，证明 C^* 为半径是 $R-a$ (a 是间距)的圆。

6.5 小结

本节专门讨论平面曲线．读者有必要注意平面曲线的下述两项特点：

一、把曲率 k 改造成平面曲率 k_r，使它包含平面曲线的弯曲程度和弯曲方向两方面的信息：

(1) 弯曲程度：$|k_r|=k$;

(2) 弯曲方向：曲线依 k_r 为正或为负而向着逆时针或顺时针方向弯曲前进．弯曲方向的转折点称为平面曲线的拐点．拐点处的 $k_r=0$.

二、通过对平面曲线的弗雷耐方程的两次积分，给出曲

线解的显式表示. 从而使得表示曲线形状的内在方程

$$k_r = k_r(s)$$

同表示曲线位置的参数方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的联系更直接.

6.4 段介绍了平面曲线族的包络线以及平面曲线的等距曲线, 它们在机械零件的设计和制造中很有用处.

本节的主要计算公式有:

一、求平面曲率 k_r

(1) 已知曲线的参数方程 $\boldsymbol{r}=\{x(t), y(t)\}$, 则

$$k_r = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

(2) 已知切线旋转角 $\theta=\theta(s)$, 则

$$k_r = \frac{d\theta}{ds} \quad (s\text{是弧长参数}).$$

二、已知内在方程 $k_r=k_r(s)$ 和初值 θ_0、x_0、y_0, 求曲线的参数方程 $\boldsymbol{r}=\{x(s), y(s)\}$.

(1) 先计算旋转角

$$\theta=\int_0^s k_r(s)\,ds+\theta_0;$$

(2) 参数方程为

$$\begin{cases} x(s)=\displaystyle\int_0^s \cos\theta(s)\,ds+x_0 \\ y(s)=\displaystyle\int_0^s \sin\theta(s)\,ds+y_0. \end{cases}$$

三、包络线和等距曲线

(1) 给定平面曲线族

$$C_\lambda:\ F(x, y, \lambda)=0,$$

包络线方程为

$$C:\quad \begin{cases} F(x,\ y,\ \lambda)=0 \\ F'_\lambda(x,\ y,\ \lambda)=0. \end{cases}$$

(2) 给定平面曲线

$$C:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

等距曲线(间距为 a)为

$$C^*:\quad \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+a\boldsymbol{N}_r(s).$$

第七节 特殊空间曲线

我们已经学过，最简单的空间曲线是曲率和挠率都为常数的圆柱螺线. 在本节中，我们要介绍几种比较复杂一些的特殊空间曲线，这些曲线的曲率和挠率之间满足一个简单的方程.

我们所以要叙述有关特殊曲线的研究，是为了让读者熟悉微分几何的典型方法：运用弗雷耐标架，接连几次微分手续，并代入弗雷耐公式，最后获得若干几何结论.

在最后一段要介绍空间曲线的渐伸线和渐缩线：尤其是在机械工程中，平面曲线的渐伸线和渐缩线是非常有用的.

7.1 一般螺线

一般螺线的定义已经在 3.3 段给出了，并且通过 3.3 中的例 2 导出了一般螺线的一个等价条件. 然后在习题五的第 10 题中要求读者证明一般螺线的两个等价条件. 归纳起来，有下面的定理：

定理 下列每项性质都可以作为一般螺线的特征(设 $k\tau\neq 0$)：

(1) 挠率 τ 和曲率 k 之比等于常数；

(2) 曲线的切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 与固定方向 $\boldsymbol{u}$ 成定角；

(3) 曲线的主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$ 与固定方向 $\boldsymbol{u}$ 垂直；

(4) 曲线的从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 与固定方向 $\boldsymbol{u}$ 成定角；

(5) 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的混合积 $(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}^{(4)})=0$.

【证】 我们从(1)出发．设曲线的曲率与挠率之比为常数 a：

$$\tau=ak.$$

记 $a=\operatorname{ctg}\alpha$，把上式写成

$$\tau\sin\alpha=k\cos\alpha. \tag{7.1}$$

设向量

$$\boldsymbol{u}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{T}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{B}. \tag{7.2}$$

关于弧长 s 微分(7.2)的两边，利用弗雷耐公式和(7.1)，并注意到 α 是定角，得到

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{u}}{ds}&=\cos\alpha\,\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}+\sin\alpha\,\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\\&=(k\cos\alpha-\tau\sin\alpha)\boldsymbol{N}=0,\end{aligned} \tag{7.3}$$

就是说，$\boldsymbol{u}$ 是常单位向量．

在(7.2)的等号两边依次点乘上 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$，便得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\cos\alpha\\ \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}=0\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}=\sin\alpha,\end{cases} \tag{7.4}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 是常向量，α 是常数．这三个式子依次表明了条件(2)、(3)、(4)的成立．

反过来，假定(7.4)中的任意一式成立，我们可导出条件(1)．换言之，条件(1)～(4)是等价的．

首先，假定(7.4)的第1式或第3式成立，两边对 s 求导，

由假设条件 $k\tau\neq 0$，便导得(7.4)的第2式成立. 因此，我们只须从(7.4)的第2式导出 τ 与 k 的比为常数就够了.

(7.4)的第2式表明 $\boldsymbol{N}$ 垂直于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{B}$，从而三向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{B}$ 共面. 我们不妨取 $\boldsymbol{u}$ 为单位向量，并把向量 $\boldsymbol{u}$ 分解在标架 $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B}\}$ 上：

$$\boldsymbol{u}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{T}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{B}, \tag{7.5}$$

式中 α 是 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{T}$ 之间的夹角. 我们把(7.4)的第2式的两边关于 s 微分，得

$$(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{u}=0. \tag{7.6}$$

可是，(7.5)两边分别点乘 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{B}$，便得

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\cos\alpha\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}=\sin\alpha.\end{cases} \tag{7.7}$$

所以从(7.6)得出

$$\frac{\tau}{k}=\operatorname{ctg}\alpha. \tag{7.8}$$

另外，对于 s 微分(7.7)的第1式的两边，由于 $\boldsymbol{u}$ 是常向量，从(7.4)的第2式便知道 α 是常数. 这样就证明了条件(1)的成立.

最后，我们考察条件(5)，利用弗雷耐公式算得混合积

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}^{(4)})&=(\boldsymbol{T}', \boldsymbol{T}'', \boldsymbol{T}''')\\ &=(k\boldsymbol{N}, -k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B}, -3kk'\boldsymbol{T}\\ &\quad+(k''-k^3-k\tau^2)\boldsymbol{N}\\ &\quad+(2k'\tau+k\tau')\boldsymbol{B})\\ &=k^3(k\tau'-k'\tau)=k^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right).\end{aligned}$$

所以条件(5)等价于条件(1). 证毕.

*【例】 圆锥对数螺线 Γ 的参数方程是

$$\Gamma:\ \boldsymbol{r}(\varphi)=\{f\sin\alpha\cos\varphi,\ f\sin\alpha\sin\varphi,\ f\cos\alpha\}$$
$$(-\infty<\varphi<+\infty), \qquad (7.9)$$

式中
$$f=ce^{a\varphi},\quad a=\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

α、β、c 都是常数$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\pi,\ c>0\right)$，$\varphi$ 是曲线 Γ 的参数。

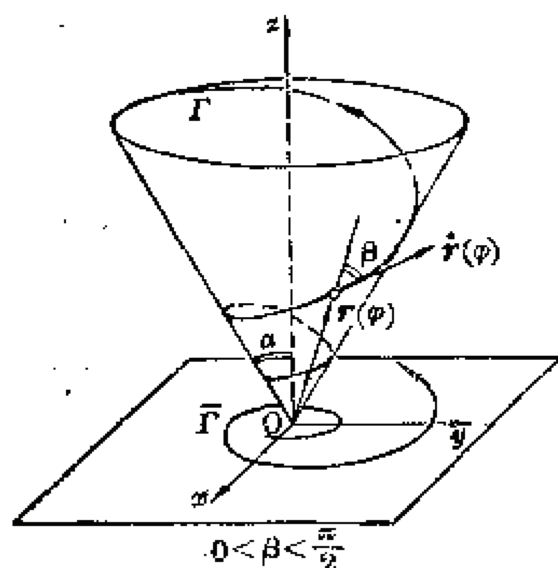


图 1-57

现在我们给出它的五个性质，从而勾画出圆锥对数螺线的几何特征(图 1-57)。

性质 1　Γ 落在一个圆锥面之上，即
$$x^2+y^2=(\operatorname{tg}^2\alpha)z^2. \qquad (7.10)$$

这是从 (7.9) 消去 f 和 φ 的结果。这个圆锥面的顶角是 2α。

性质 2　Γ 在 Oxy 平面上的投影是平面对数螺线。

圆锥对数螺线 Γ 在 Oxy 平面上的投影曲线方程为
$$\overline{\Gamma}:\ \begin{cases} x=f\sin\alpha\cos\varphi \\ y=f\sin\alpha\sin\varphi. \end{cases}$$

化成极坐标形式，为
$$\overline{\Gamma}:\ \rho=(c\sin\alpha)e^{a\varphi}, \qquad (7.11)$$

所以它是平面对数螺线方程(图 1-57)。

由于 Γ 有上述的两个性质，所以称为圆锥对数螺线。

性质 3　Γ 的位置向量 $\boldsymbol{r}(\varphi)$ 与其切向量 $\dot{\boldsymbol{r}}(\varphi)$ 处处相交于定角。

在平面对数螺线也同样有这个性质，而且以此为特征(见

6.3段的例4)．性质3进一步表明圆锥对数螺线和平面对数螺线是相似的．

为了阐明性质3，从 Γ 的切向量

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}(\varphi)=\{&\dot{f}\sin\alpha\cos\varphi-f\sin\alpha\sin\varphi,\\&\dot{f}\sin\alpha\sin\varphi+f\sin\alpha\cos\varphi,\ \dot{f}\cos\alpha\}\\=\{&(a\cos\varphi-\sin\varphi)f\sin\alpha,\\&(a\sin\varphi+\cos\varphi)f\sin\alpha,\ af\cos\alpha\}\end{aligned}$$

和

$$|\boldsymbol{r}|=|f|=f,$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=|f|\sqrt{a^2+\sin^2\alpha}=\left|\frac{f\sin\alpha}{\sin\beta}\right|=\frac{f\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=f\dot{f}=af^2,$$

我们得到

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}||\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{af^2}{f^2\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}}=\cos\beta,$$

因此，$\boldsymbol{r}(\varphi)$ 与 $\dot{\boldsymbol{r}}(\varphi)$ 处处相交于定角 β.

性质3也可写成：圆锥对数螺线 Γ 与所在圆锥面的母线常交于定角 β. 原来圆锥对数螺线的定义就是这样.

性质4 Γ 是在圆锥上的一般螺线.

$\dot{\boldsymbol{r}}$ 与 z 轴上的单位向量 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$ 之间夹角的余弦是

$$\cos(\widehat{\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{k}})=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{k}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{af\cos\alpha}{\dfrac{f\sin\alpha}{\sin\beta}}=\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

所以 Γ 的切向量与固定方向 $\boldsymbol{k}$ 恒交于定角

$$\cos^{-1}(\cos\alpha\cdot\cos\beta),$$

因而 Γ 是一般螺线.

性质5 Γ 依照

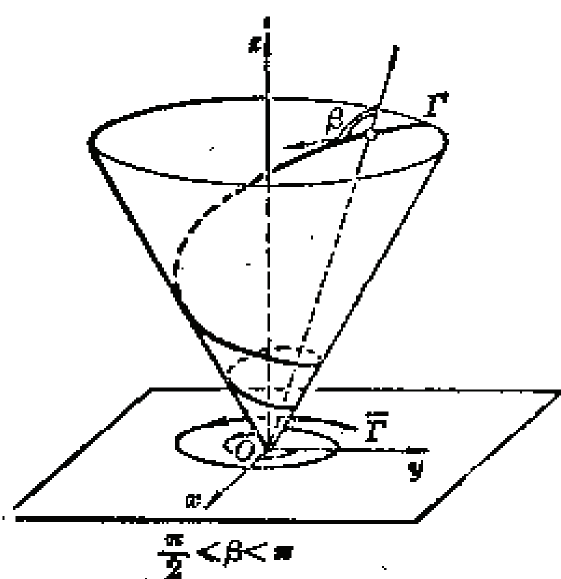


图 1-58

$$\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

或 $$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$$

而分成右旋(图 1-57)或左旋(图 1-58).

按照 4.3 段的结论，空间曲线的旋向决定于挠率 τ，即混合积$(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})$的符号．可是，经过容易的演算，我们有

$$(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})=a(1+a^2)f^3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha.$$

由于 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 及 $c>0$，从而 $f>0$，因此 $(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})$ 与 $\operatorname{ctg}\beta$ 的正负号相同，即：

当 $\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})>0$，曲线 Γ 右旋；

当 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$时，$(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})<0$，曲线 Γ 左旋；

当 $\beta=\frac{\pi}{2}$时，$a=0$，$f=$常数 C，Γ 是圆锥面上一个圆．

注意： 当 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$时，$a<0$，因此 Γ 的投影曲线 $\bar{\Gamma}$ 是从远处向着中心 O 螺旋地前进，从而圆锥对数螺线 Γ 也是从远处向着圆锥顶点 O 螺旋地前进(图 1-58)．

圆锥对数螺线在无线电天线设计方面有着实际的应用．

7.2 球面曲线

我们在 4.2 段的例 2 和习题六中已经指出球面曲线的两

个性质：

性质 1　曲线 C 为球面曲线的充要条件是：C 的所有法平面都通过定点 O，点 O 恰是 C 所在球面的中心。

性质 2　假定 $k\tau\neq 0$。设中心为坐标的原点，而且球面曲线的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$。那末，曲线在弗雷耐标架上的表示式为

$$\boldsymbol{r}=-R\boldsymbol{N}-\frac{R'}{\tau}\boldsymbol{B}, \tag{7.12}$$

式中记曲率半径

$$R=\frac{1}{k},\quad R'=\frac{dR}{ds}.$$

我们证明

性质 3　当 $k\tau\neq 0$ 时，曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为球面曲线的充要条件是

$$R\tau+\left(\frac{R'}{\tau}\right)'=0. \tag{7.13}$$

【证】　先证必要性：由性质 2，球面曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

满足方程(7.12)。两边关于弧长 s 求导，得到

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}-\left[R\tau+\left(\frac{R'}{\tau}\right)'\right]\boldsymbol{B}, \tag{7.14}$$

从而(7.13)式成立。

次证充分性：若(7.13)式成立，作向量

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{N}+\frac{R'}{\tau}\boldsymbol{B}. \tag{7.15}$$

对 s 求导，便有

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}=\left[R\tau+\left(\frac{R'}{\tau}\right)'\right]\boldsymbol{B}=0.$$

因此，

$$\boldsymbol{m}=\text{常向量 }\boldsymbol{m}_0,$$

将其代入(7.15),得到

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m}_0)^2=R^2+\left(\frac{R'}{\tau}\right)^2. \qquad (7.16)$$

但 $$\frac{d}{ds}\left[R^2+\left(\frac{R'}{\tau}\right)^2\right]=\frac{2R'}{\tau}\left[R\tau+\left(\frac{R'}{\tau}\right)'\right]=0,$$

即 $$R^2+\left(\frac{R'}{\tau}\right)^2$$

为常数. 于是方程(7.16)表明,曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 落在以点 $\boldsymbol{m}_0$ 为球心的球面上.

当球面曲线满足条件 $k'\neq0$ 时,从性质 3 可直接导出:

性质 4 当 $kk'\tau\neq0$ 时,曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为球面曲线的充要条件是

$$R^2+\left(\frac{R'}{\tau}\right)^2=\text{常数}. \qquad (7.17)$$

上面四个性质都是球面曲线的充要条件.

7.3 贝尔特朗曲线

从内在方程角度观察,最简单的空间曲线是圆柱螺线:

$$k=\text{常数},\quad \tau=\text{常数}.$$

其次是一般螺线:

$$\frac{\tau}{k}=\text{常数}.$$

更复杂些,便是贝尔特朗曲线,内在方程为 $\lambda k+\mu\tau=1$,式中 λ 和 μ 是常数,曲率与挠率满足线性关系.

贝尔特朗曲线的定义,不象一般螺线或球面曲线那样按照曲线自身的几何特征便能作出定义,而是需要借助于另一条曲线.

定义 对于给定的曲线 C，若能找到某曲线 C^*，与 C 的点建立一一对应关系，使得在对应点处的主法线重合，则称 C 为贝尔特朗(Bertrand)曲线(图 1-59)。

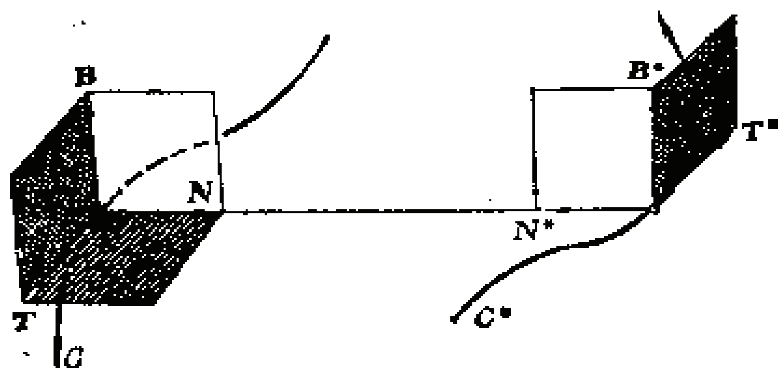


图 1-59

从定义容易看出，曲线 C^* 也是贝尔特朗曲线。因此我们称 C 和 C^* 为贝尔特朗曲线偶，其中每一条曲线为另一条曲线的伴线。

下面我们给出贝尔特朗曲线的几个几何性质：

性质 1 任意一条平面曲线都是贝尔特朗曲线。

设给定平面曲线 C，作 C 的等距曲线 C^*。按照 6.4 段关于等距曲线的性质 1，C 与 C^* 在对应点有公共法线，即公共主法线。因此 C 是贝尔特朗曲线，C 的任意一条等距曲线都是 C 的伴线。

今后，我们仅仅考察挠率 $\tau\neq 0$ 的贝尔特朗曲线。

设 C 和 C^* 是贝尔特朗曲线偶，我们约定下述记号：

$$C:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s), \tag{7.18}$$

式中 s 是 C 的弧长参数，$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$、$k$、$\tau$ 是 C 的弗雷耐标架、曲率和挠率。C 的伴线为

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{N}(s). \tag{7.19}$$

C^* 与 C 在对应点取同一参数值 s。s 一般不是 C^* 的弧长参

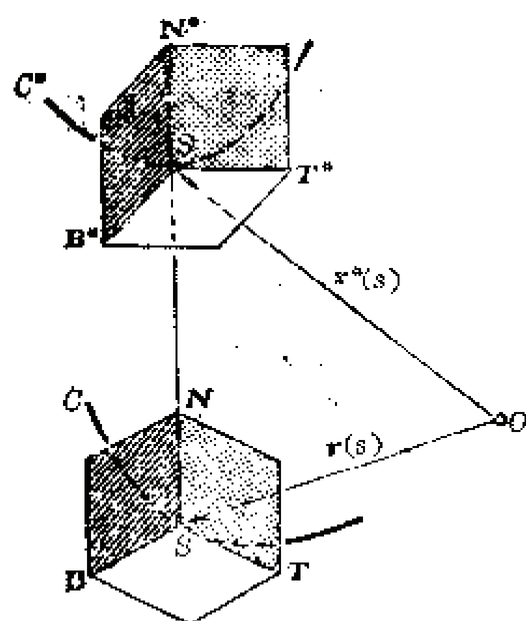


图 1-60

数. $\{T^*, N^*, B^*\}$、k^*、τ^* 为伴线 C^* 的弗雷涅标架、曲率和挠率(图 1-60). 按照定义, C 与 C^* 在对应点处主法向量平行:

$$N^* = \varepsilon N \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{7.20}$$

性质 2 贝尔特朗曲线偶 C 与 C^* 对应点之间的距离等于常数.

首先, 对(7.19)式两边关于 s 求导:

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1-\lambda k) T + \frac{d\lambda}{ds} N + \lambda\tau B. \tag{7.21}$$

在上式两边点乘 N, 利用条件(7.20), 得到

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0, \tag{7.22}$$

解得 $\lambda =$ 常数 λ_0.

其次, 从(7.19)式求得 C 与 C^* 在对应点之间的距离为

$$|r^*(s) - r(s)| = |\lambda_0|.$$

性质 3 贝尔特朗曲线偶 C 与 C^* 在对应点处切向量常交于定角.

这因为, C 与 C^* 在对应点处切向量夹角的余弦为 $T \cdot T^*$, 对 s 求导, 便有

$$\frac{d}{ds}(T \cdot T^*) = \frac{dT}{ds} \cdot T^* + T \cdot \frac{dT^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds}$$

$$= kN \cdot T^* + T \cdot (k^* N^*) \frac{ds^*}{ds} = 0.$$

性质 4 空间挠曲线 C 为贝尔特朗曲线的充要条件是曲

率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 满足线性关系

$$\lambda k(s)+\mu\tau(s)=1, \qquad (7.23)$$

式中 λ、μ 为常数，而且 λ 是 C 与 C^* 在对应点之间的距离.

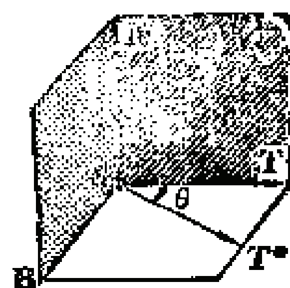


图 1-61

【证】 必要性：设 C 是贝尔特朗曲线，C^* 为 C 的伴线，由于(7.22)式，(7.21)可写成

$$\frac{ds^*}{ds}\boldsymbol{T}^*=(1-\lambda k)\boldsymbol{T}+\lambda\tau\boldsymbol{B}. \qquad (7.24)$$

单位向量 $\boldsymbol{T}^*$ 在 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{B}$ 上的分解式一般可以表成

$$\boldsymbol{T}^*=\cos\theta\,\boldsymbol{T}+\sin\theta\,\boldsymbol{B},$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{T}^*$ 与 $\boldsymbol{T}$ 之间的夹角(图 1-61). 由性质 3，θ 是常数. 把上式代入(7.24)式左端，比较 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的系数，得到

$$\begin{cases}\dfrac{ds^*}{ds}\cos\theta=1-\lambda k\\[2mm] \dfrac{ds^*}{ds}\sin\theta=\lambda\tau.\end{cases} \qquad (7.25)$$

在(7.25)的第 2 式两边乘以常数 $\operatorname{ctg}\theta$，再与(7.25)的 1 式两边分别相减，整理得

$$\lambda k+\mu\tau=1, \qquad (7.26)$$

这里记常数 $\mu=\lambda\operatorname{ctg}\theta$. 根据性质 2，(7.26)式中的常数 λ 恰是曲线 C 与 C^* 在对应点之间的距离.

充分性：设曲线 C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率与挠率满足方程(7.23). 作曲线

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{N}(s), \qquad (7.27)$$

两边对 s 求导，并利用(7.23)，有

$$\boldsymbol{T}^*\frac{ds^*}{ds}=\tau(\mu\boldsymbol{T}+\lambda\boldsymbol{B}). \qquad (7.28)$$

对上式两边取向量长，得到

$$\frac{ds^*}{ds}=\varepsilon\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\quad(\varepsilon=\pm1).$$

代回(7.28)式右端，求得

$$T^*=\varepsilon\frac{\mu T+\lambda B}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}.\tag{7.29}$$

将上式对 s 求导，便有

$$\frac{ds^*}{ds}k^*N^*=\frac{\mu k-\lambda\tau}{\varepsilon\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}N,$$

即

$$N^*=\pm N.\tag{7.30}$$

我们取曲线 C 与 C^* 上参数 s 相同的点为对应点，按照(7.27)和(7.30)式，C 与 C^* 在对应点有公共的主法线(图1-60)，从而是贝尔特朗曲线偶．证毕．

性质 5 若贝尔特朗曲线 C 不是圆柱螺线，则 C 有唯一的伴线 C^*．圆柱螺线必是贝尔特朗曲线，而且有无穷多条伴线．

【证】 设贝尔特朗曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 有两条不同的伴线 C_1^* 和 C_2^*，它们的方程为

$$C_1^*:\ \boldsymbol{r}_1^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda_1N(s);$$
$$C_2^*:\ \boldsymbol{r}_2^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda_2N(s),$$

这里 $\lambda_1\neq\lambda_2$．按照性质 4，曲线 C 的曲率 k 和挠率 τ 满足两套线性关系：

$$\begin{cases}\lambda_1k+\mu_1\tau=1\\ \lambda_2k+\mu_2\tau=1.\end{cases}\tag{7.31}$$

我们把(7.31)看成相容的二阶线性方程组，从中解得的 k 和 τ 仅与常系数 λ_1、μ_1、λ_2、μ_2 有关．这表明 C 的曲率与挠率都是常数，即圆柱螺线．

现在证明性质 5 的后半部分．设 C 是圆柱螺线，其曲率 k 和挠率 τ 都是非零常数．我们取任一常数 λ，令

$$\mu=\frac{1-\lambda k}{\tau},$$

它们满足方程(7.23)．按照性质 4，圆柱螺线 C 是贝尔特朗曲线，λ 是 C 与伴线 C^* 在对应点之间的距离．λ 取得不同，C^* 也就不同，这说明圆柱螺线 C 有无穷多条伴线．

上述各项性质，从几个不同的侧面勾划了贝尔特朗曲线的几何特征．

性质 1 说明了：平面上的任意一对等距曲线，都是贝尔特朗曲线偶．但根据性质 2，我们可以把贝尔特朗曲线偶看成平面上等距曲线的一种拓广：将 C^* 看成曲线 C 沿着主法线方向的"等距曲线"．

性质 4 从内在方程角度刻划了贝尔特朗曲线 C 的特征，即 C 的曲率 k 与挠率 τ 满足线性关系(7.23)，其表达方式与伴线 C^* 无关．为判别一条曲线是不是贝尔特朗曲线，性质 4 提供了一个直接而有效的方法．

7.4 曼恩海姆曲线

贝尔特朗曲线的定义依赖于曲线偶之间的一一对应关系．我们如果改变曲线偶之间的那种对应关系，便能得到另外一种空间曲线，称为曼恩海姆曲线，它的曲率和挠率满足一个二次方程，比贝尔特朗曲线稍复杂些．

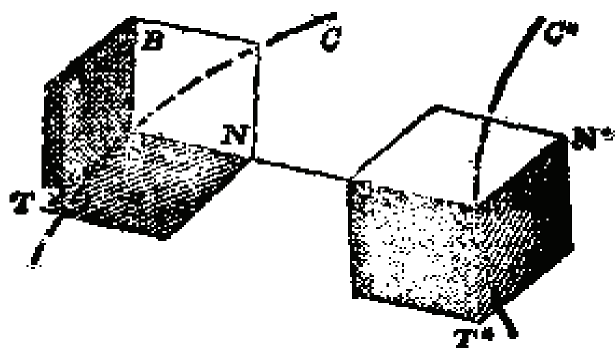


图 19

定义 对于给定的曲线 C，若能找到某曲线 C^*，与 C 的点建立一一对应关系，使得在对应点处，曲线 C 的主法线与曲线 C^* 的从法线重合(图 1-62)，则称 C 为曼恩海姆(Mannheim)曲线。

曼恩海姆曲线的定义方式同贝尔特朗曲线十分相似，但有一个差别：C^* 与 C 的地位不是对等的。我们不难看出，C^* 不是曼恩海姆曲线。

设曼恩海姆曲线

$$C:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

式中 s 是 C 的弧长参数。对应曲线

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{N}(s). \tag{7.32}$$

C^* 与 C 在对应点取同一参数值 s。

对(7.32)式两边关于 s 求导：

$$\boldsymbol{T}^*\frac{ds^*}{ds}=(1-\lambda k)\boldsymbol{T}+\frac{d\lambda}{ds}\boldsymbol{N}+\lambda\tau\boldsymbol{B}, \tag{7.33}$$

式中 $s^*=s^*(s)$ 是 C^* 的弧长参数。按照定义，有

$$\boldsymbol{B}^*=\pm\boldsymbol{N} \tag{7.34}$$

成立。将上面的两式两边分别相乘，得到

$$\frac{d\lambda}{ds}=0,$$

因此 $\lambda=$常数 λ_0。代入(7.32)，得到

$$|\boldsymbol{r}^*(s)-\boldsymbol{r}(s)|=|\lambda_0|.$$

于是证明了

性质 1 曼恩海姆曲线 C 与对应曲线 C^* 在对应点之间的距离等于常数。

下面我们给出曼恩海姆曲线的内在性质：

性质 2 曲线 C 为曼恩海姆曲线的充要条件是：C 的曲

率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 满足关系式

$$k=\lambda(k^2+\tau^2), \tag{7.35}$$

式中常数 λ 是 C 与 C^* 在对应点之间的距离.

【证】 必要性：设 C 是曼恩海姆曲线，则 C^* 的单位切向量满足(7.33)式：

$$\boldsymbol{T}^*=[(1-\lambda k)\boldsymbol{T}+\lambda\tau\boldsymbol{B}]\frac{ds}{ds^*}, \tag{7.36}$$

λ 是曲线 C 与 C^* 在对应点之间的常距离。

将(7.36)两边关于 s^* 求导：

$$k^*\boldsymbol{N}^*=\{(1-\lambda k')\boldsymbol{T}+[k-\lambda(k^2+\tau^2)]\boldsymbol{N}+\lambda\tau'\boldsymbol{B}\}\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2$$
$$+[(1-\lambda k)\boldsymbol{T}+\lambda\tau\boldsymbol{B}]\frac{d^2s}{ds^{*2}}.$$

上式与(7.34)式两边分别相乘，便得

$$k=\lambda(k^2+\tau^2).$$

充分性：取(7.35)中的常数 λ，作曲线

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{N}(s).$$

将其两边关于 s 求导两次，并利用关系式(7.35)，得到

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=(1-\lambda k)\boldsymbol{T}+\lambda\tau\boldsymbol{B},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{ds^2}=(1-\lambda k')\boldsymbol{T}+\lambda\tau'\boldsymbol{B}.$$

两边分别叉乘后，得

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{ds^2}=\begin{vmatrix}1-\lambda k & \lambda\tau\\ 1-\lambda k' & \lambda\tau'\end{vmatrix}\boldsymbol{N}.$$

这表明 C^* 的主法向量 $\boldsymbol{B}^*$ 平行于 C 的从法向量 $\boldsymbol{N}$，因此 C 是曼恩海姆曲线．证毕．】

我们注意到性质2中常数λ的几何意义，容易导出

推论 曼恩海姆曲线C的对应曲线C^*是唯一存在的.

习题十二

1. 设在两条曲线C与C^*之间建立了点的一一对应关系，试证明：
   (1) 若在对应点处两曲线有公共的切线，则C与C^*相重合；
   (2) 若在对应点处两曲线有公共的从法线，则C与C^*或者重合，或者都是平面曲线.
2. 设在两条曲线C与C^*之间建立了点的一一对应关系，试证明：
   (1) 若在对应点处的主法线互相平行，则C与C^*在对应点处的切向量交于定角；
   (2) 若对应点处的切线互相平行，则C与C^*在对应点处的弗雷耐标架也互相平行(即对应的主法线和从法线也分别平行)，而且有关系式

$$\frac{k^*}{k}=\left|\frac{\tau^*}{\tau}\right|$$

   成立. 式中k、τ、k^*、τ^*分别是曲线C与C^*的曲率和挠率.
   (3) 若对应点处的从法线互相平行，则C与C^*在对应点处的弗雷耐标架互相平行，而且有下面的关系式成立：

$$\frac{k^*}{k}=\left|\frac{\tau^*}{\tau}\right|.$$

3. 试证明：作为贝尔特朗曲线的圆柱螺线C，它的所有伴线C^*都是与C同轴线的圆柱螺线.
4. 若空间挠曲线C的曲率k为常数，则称为**常曲率曲线**，试证明：
   (1) C是贝尔特朗曲线；
   (2) 伴线C^*是C的曲率中心轨迹；
   (3) C^*与C的曲率、挠率满足关系

$$k^*=k,\quad \tau^*=\frac{k^2}{\tau}.$$

5. 设圆柱螺线C的曲率为k，挠率为τ，C的曲率中心轨迹C^*的挠

率为 τ^*. 求证 $\tau\tau^*=k^2$.

6. 试证明：贝尔特朗曲线偶 C 与 C^* 在对应点的挠率之积

$$\tau\tau^*=\frac{1}{\lambda^2+\mu^2}.$$

7.5 渐伸线和渐缩线

在 7.4 和 7.5 段，我们利用两条曲线 C 与 C^* 之间满足某种几何条件的一一对应关系定义了贝尔特朗曲线和曼恩海姆曲线。现在，我们改变那种对应关系的几何条件，而作出渐伸线和渐缩线的定义。

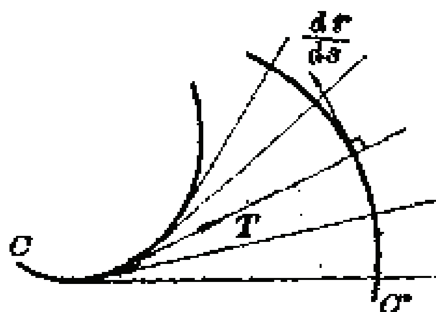


图 1-63

定义 设在两曲线 C 与 C^* 之间建立了一一对应关系，使得在对应点，曲线 C 的切线重合于曲线 C^* 的某一条法线，则称 C^* 为 C 的**渐伸线**，C 为 C^* 的**渐缩线**(图 1-63)。

在以下的讨论及习题中，我们约定：

曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, $\{k, \tau, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$

为曲线 C 的曲率、挠率和弗雷耐标架、对应曲线

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}^*(s),\quad \{k^*, \tau^*, \boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*\}$$

为曲线 C^* 的曲率、挠率和弗雷耐标架。参数 s 相同的点为两曲线的对应点，s 是 C 的弧长参数。C^* 的弧长参数记成

$$s^*:\ s^*=s^*(s).$$

一、渐伸线

性质 1 曲线 C 的渐伸线方程为

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+(a-s)\boldsymbol{T}(s), \tag{7.37}$$

式中 a 为任一常数。

【证】 按照定义，我们把 C 的渐伸线方程写成

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\alpha(s)\boldsymbol{T}(s). \tag{7.38}$$

将上式两边对 s 求导：

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=\left(1+\frac{d\alpha}{ds}\right)\boldsymbol{T}+\alpha k\boldsymbol{N}. \tag{7.39}$$

由于 C 的切向 $\boldsymbol{T}$ 垂直于 C^* 的切向 $\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}$（图 1–65），在 (7.39) 两边点乘 $\boldsymbol{T}$ 后，得到方程

$$1+\frac{d\alpha}{ds}=0.$$

从中解得
$$\alpha=-s+a,$$
式中 a 是积分常数．将 α 代入(7.38)式，便得渐伸线方程 (7.37)．证毕．】

为了保证渐伸线 C^* 是正则曲线，我们对 C 附加曲率 $k\neq 0$ 的条件．这是因为，如果在 C 上某点 $k=0$，从(7.39)式有

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=0,$$

曲线 C^* 上出现奇点．因此，当 C 是平面曲线时，为了构造正则的渐伸线，C 必须是凸曲线．

方程(7.37)表示了曲线 C 的全体渐伸线．取不同的常数 a，就代表不同的渐伸线．那末，任意两条渐伸线 C_1^* 和 C_2^* 之间有什么关系呢？

设 C_1^* 和 C_2^* 的方程为

$$C_1^*:\ \boldsymbol{r}_1^*(s)=\boldsymbol{r}(s)+(a_1-s)\boldsymbol{T}(s);$$
$$C_2^*:\ \boldsymbol{r}_2^*(s)=\boldsymbol{r}(s)+(a_2-s)\boldsymbol{T}(s).$$

令 C_1^* 与 C_2^* 上的 s 相同的点为对应点．对应点连线的长度

$$|\boldsymbol{r}_1^*(s)-\boldsymbol{r}_2^*(s)|=|a_1-a_2|$$

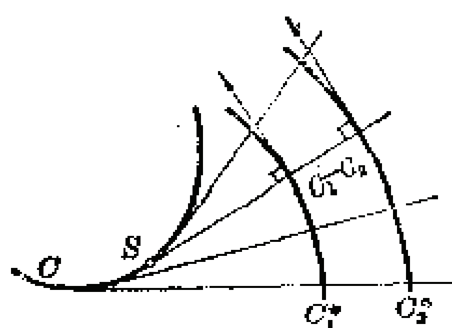


图 1-64

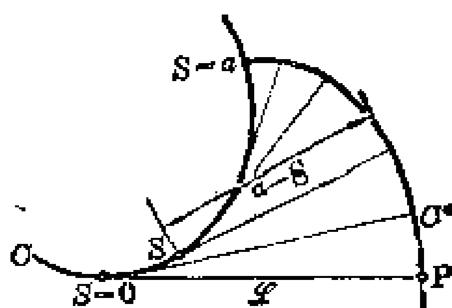


图 1-65

为常数(图 1-64)．于是得到

性质 2 曲线 C 的任意两条渐伸线 C_1^* 和 C_2^* 在对应点之间的距离为常数．

下面介绍一个可用于渐伸线作图的性质：

性质 3 以曲线 C 上 $s=0$ 处为始端，拉紧长为 a 的细绳 $\mathscr{L}$，逐渐回绕到曲线 C 上，则细绳的终端 P 在空间描绘的轨迹就是 C 的渐伸线 C^*．

事实上，细绳 $\mathscr{L}$ 回绕到曲线 C 上，意味着线段 $\mathscr{L}$ 处处与 C 相切．从图 1-65 可见，在运动过程中，P 点的位置向量为

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+(a-s)\boldsymbol{T}(s),$$

这就是渐伸线 C^* 的方程(7.57)．

如果 C 是平面曲线，我们在 P 点放置一枝铅笔，随着 P 的运动，便在该平面上画出 C 的渐伸线 C^*．这种作图法在工程技术中有着实际的应用．

【例 1】 求圆柱螺线

$$C:\ \boldsymbol{r}=\{R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ B\theta\}$$

的渐伸线 C^*，并证明 C 的每一条渐伸线都落在垂直于 z 轴的平面上．

解： 因为

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\{-R\sin\theta,\ R\cos\theta,\ B\},$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{R^2+B^2},$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{1}{\sqrt{R^2+B^2}}\{-R\sin\theta,\ R\cos\theta,\ B\},$$

$$s=\int_0^\theta|\dot{\boldsymbol{r}}|\,d\theta=\sqrt{R^2+B^2}\,\theta,$$

C 的渐伸线 C^* 的方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}^*&=\boldsymbol{r}+(a-s)\boldsymbol{T}\\&=\{R[\cos\theta+(\theta-D)\sin\theta],\\&\qquad R[\sin\theta-(\theta-D)\cos\theta],\ BD\},\end{aligned}\tag{7.40}$$

式中记常数 $$D=\frac{a}{\sqrt{R^2+B^2}}.$$

因为 C^* 的方程中的 z 坐标分量为常数 BD，不论 a 取何值，C^* 都落在垂直于 z 轴的平面 $z=BD$ 上(图 1-66)。

若把 C^* 限制在平面 $z=BD$ 上，按照 x 和 y 分量表示的参数方程为

$$C^*:\ \begin{cases}x=R[\cos\theta+(\theta-D)\sin\theta]\\y=R[\sin\theta-(\theta-D)\cos\theta].\end{cases}\tag{7.41}$$

在后面本段的例 2 我们可看到，C^* 就是所在平面与圆柱相截圆 K 的渐伸线。

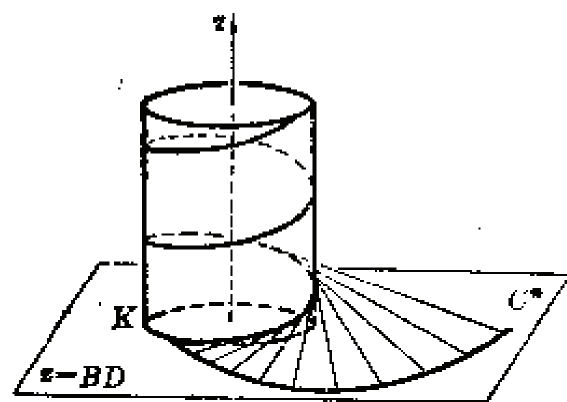


图 1-66

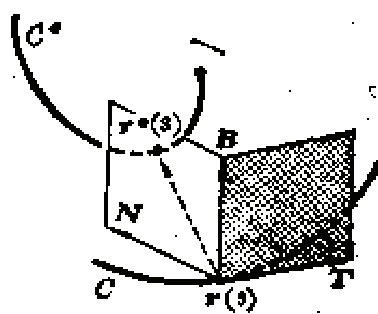


图 1-67

二、渐缩线

在本小段，为了书写简单，我们用记号 C^* 表示曲线 C 的渐缩线。

性质 曲线 C 的渐缩线方程为

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{k}\boldsymbol{N}+\frac{1}{k}\operatorname{ctg}\left(\int\tau(s)ds+a\right)\boldsymbol{B},\tag{7.42}$$

式中 a 为任意常数。

【证】 由定义，渐缩线 C^* 的方程为

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\alpha(s)\boldsymbol{N}(s)+\beta(s)\boldsymbol{B}(s),\tag{7.43}$$

这里 $\alpha(s)$ 和 $\beta(s)$ 是待定函数(图 1-67)。(7.43)式的几何意义是：$\boldsymbol{r}^*(s)-\boldsymbol{r}(s)$ 含于曲线 C 在 S 点的某一法线方向。

在(7.43)式两边对 s 求导，得到 C^* 在 s 处的切向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=(1-\alpha k)\boldsymbol{T}+(\alpha'-\beta\tau)\boldsymbol{N}+(\beta'+\alpha\tau)\boldsymbol{B},\tag{7.44}$$

它应平行于 C 在 S 点的法线方向 $\boldsymbol{r}^*(s)-\boldsymbol{r}(s)$。按照(7.43)与(7.44)式，便得关系式

$$\begin{cases}1-\alpha k=0,\\ \dfrac{\alpha'-\beta\tau}{\alpha}=\dfrac{\beta'+\alpha\tau}{\beta}.\end{cases}\tag{7.45}$$

从(7.45)的第 1 式得到

$$\alpha=\frac{1}{k},$$

从(7.45)的第 2 式解出

$$\tau=\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{d}{ds}\operatorname{ctg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}.$$

对其两边积分，求得

$$\beta=\alpha\operatorname{ctg}\left(\int\tau(s)ds+a\right),\tag{7.46}$$

其中 a 是积分常数. 把求得的 α、β 代入(7.43), 性质即得证. ∎

为了保证渐缩线 C^* 的正则性, 我们对曲线 C 需要附加条件

$$\chi \equiv \left(\frac{dr^*}{ds}\right)^2 = (\alpha' - \beta\tau)^2 + (\beta' + \alpha\tau)^2 \neq 0. \qquad (7.47)$$

特别, 当 C 是平面曲线时, $\tau = 0$, 代入(7.46)式, 得

$$\beta = D\alpha = \frac{D}{k}.$$

这里 D 为任意常数. 这时

$$\chi = (\alpha')^2 + (\beta')^2 = \left[\left(\frac{1}{k}\right)'\right]^2 + \left[\left(\frac{D}{k}\right)'\right]^2$$

$$= \frac{(1+D^2)(k')^2}{k^4}. \qquad (7.48)$$

因此, 当 C 是平面曲线时, 渐缩线 C^* 为正则的充要条件是: 曲线 C 上 $\dfrac{dk}{ds} \neq 0$.

作为推论, 圆由于其曲率等于常数而不存在正则的渐缩线. 实际上, 圆的渐缩线退缩成一个点.

上述性质表明, 对于任意一条曲线 C, 一般存在无穷多条渐缩线 C^*, 其方程为(7.42). 其中, 随着 a 的取值不同而代表不同的渐缩线. (7.47)式是保证渐缩线 C^* 正则的充要条件.

三、平面上的渐伸线和渐缩线

本小段将讨论 C 和 C^* 位于同一平面的情况. 我们不加证明地列出有关的几项性质:

性质 1 平面上曲线 C 存在唯一的渐缩线, 它是 C 的曲率中心轨迹, 即 C 的法线族的包络.

性质 2 平面上曲线 C 的渐缩线方程为

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+\frac{1}{k_r}\boldsymbol{N}_r. \tag{7.49}$$

性质 3 平面曲线 C 的渐伸线方程为

$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+(a-s)\boldsymbol{T},$$

其中任意两条渐伸线 C_1^* 与 C_2^* 互为等距曲线，即平面上的贝尔特朗曲线偶.

【例 2】 圆的渐伸线

设平面上以 O 为圆心，R 为半径的圆

$$C:\ \boldsymbol{r}=\{R\cos\theta,\ R\sin\theta\}.$$

C 的弧长 $s=R\theta$，切向量

$$\boldsymbol{T}=\{-\sin\theta,\ \cos\theta\}.$$

圆 C 的渐伸线

$$C_a^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+(a-s)\boldsymbol{T},$$

写成参数形式是：

$$C_a^*:\ \begin{cases} x=R[\cos\theta+(\theta-D)\sin\theta], \\ y=R[\sin\theta-(\theta-D)\cos\theta], \end{cases} \tag{7.50}$$

式中常数 $D=\frac{a}{R}$.

我们在例 1 中导出圆柱螺线 C 的渐伸线方程为(7.41)，恰与(7.50)一致.

图 1-68 中画了圆的渐伸线 C_0^* 的图形. 图 1-69 是细绳作图方法. 当 a 取不同的值时，得到不同的渐伸线 C_a^*. 所有的 C_a^* 都与 C_0^* 形状相同，而且，将 C_0^* 旋转角度 $\theta=\frac{a}{R}$ 后，便得到 C_a^*. 读者只要把旋转变换作用于方程(7.50)，便可直接证明这一事实.

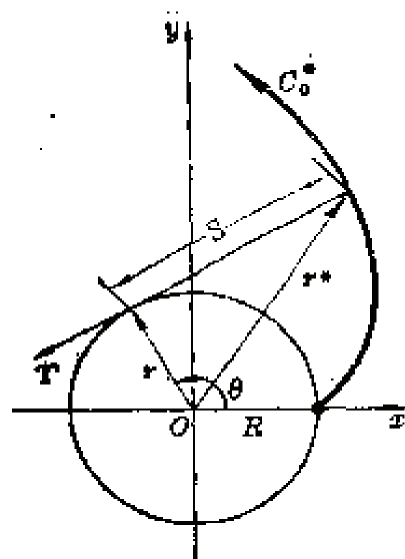


图 1-68

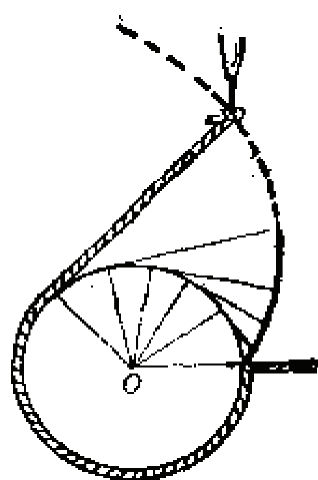


图 1-69

圆的渐伸线在机械工程中特别有用. 在工程上, 习惯称 C^* 为渐开线, C 为基圆, 并且把 C_0^* 的参数方程写成极坐标形式

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{R}{\cos\alpha},\\ \varphi=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.\end{cases}\tag{7.51}$$

我们在(7.50)中取 $D=0$, 注意到图 1-70 中直角三角形的边角关系, 容易导出(7.51)式.

注意: (7.51)不是极坐标显式方程 $\rho=\rho(\varphi)$ 形式, 而是以 α 为参量, 用参数式表示的. 这种表示方式纯粹是工程上的习惯. 在机械原理课程中, 称 α 为压力角, 称 $\varphi=\operatorname{tg}\alpha-\alpha$ 为 α 的渐开线函数, 记为 $\operatorname{inv}\alpha$. 有专门的渐开线函数表可供查用.

在机械传动机构中, 啮合齿轮的齿廓曲线大多采用渐开线(图 1-47), 这在齿轮啮合原理中有着详细的阐述.

利用渐开线的两条性质: (1)相同基圆的所有渐开线 C_0^* 的形状都相同, 它们的相互位置只差一个绕圆心的旋转;

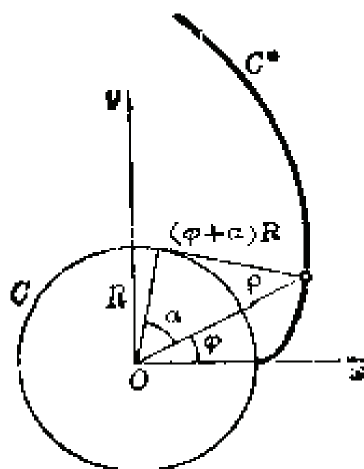


图 1-70

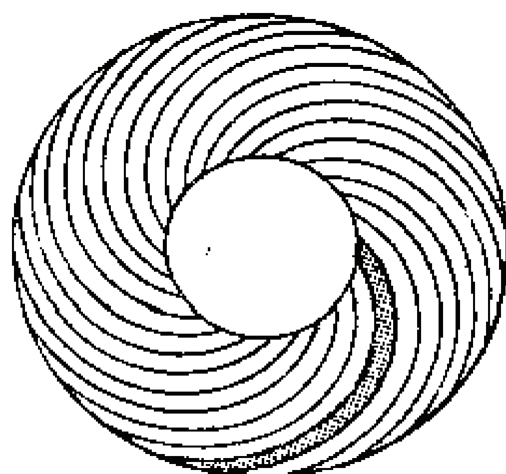


图 1-71

(2)同一基圆的任意两条渐开线都互为等距曲线．变压器厂把厚薄均匀的硅钢片弯成渐开线状，制成体积小、容量大的渐开线变压器．它的好处在于：一片片形状、大小完全相同的渐开线形硅钢片能紧密贴合地迭成圆柱形的铁芯(图 1-71)．

习 题 十 三

1．已知曲线 C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的渐开线 C^*：$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}^*(s)+(a-s)\boldsymbol{T}(s)$．试证明：曲线 C^* 的

(1) 曲率 $k^*=\dfrac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{|a-s|k}$；

(2) 从法向量 $\boldsymbol{B}^*=\dfrac{\tau\boldsymbol{T}+k\boldsymbol{B}}{\sqrt{k^2+\tau^2}}$；

(3) 挠率 $\tau^*=\dfrac{k\tau'-k'\tau}{(a-s)k(k^2+\tau^2)}$．

2．证明曲线 C 为一般螺线的充要条件是：C 的渐伸线 C^* 都是平面曲线．

3．试证明：半径 R 的圆的渐伸线，内在方程为

$$k_r=\frac{1}{\sqrt{2RS}}.$$

4．试证明：在平面场合，曲线 C：$\boldsymbol{r}=\{x(t),\ y(t)\}$ 的渐缩线的参数方程为

$$C:\ \begin{cases} X=x-\dot{y}\,\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}, \\ Y=y+\dot{x}\,\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}. \end{cases}$$

5. 在平面场合，求下列曲线的渐缩线：

(1) 抛物线 $y=px^2$;

(2) 旋轮线 $\boldsymbol{r}=\{a(t-\sin t),\ a(1-\cos t)\}$.

7.6 小结

本节介绍了几种特殊空间曲线．每种曲线包括三部分内容：(1)定义；(2)几何性质；(3)曲率 k 和挠率 τ 满足的内在方程．这些空间曲线的内在方程列表如下：

曲　线	曲率 k 和挠率 τ
圆柱螺线	$k=\lambda,\ \tau=\mu\quad(\lambda、\mu\neq 0)$
一般螺线	$\dfrac{\tau}{k}=\lambda\quad(\lambda\neq 0)$
贝尔特朗曲线	$\lambda k+\mu\tau=1\quad(\lambda\neq 0)$
曼恩海姆曲线	$k=\lambda(k^2+\tau^2)\quad(\lambda\neq 0)$
球面曲线	$R\tau+\left(\dfrac{R'}{\tau}\right)'=0\quad\left(R=\dfrac{1}{k}\right)$

表中 λ 和 μ 为常数．除了贝尔特朗曲线的 μ 可取为零外，λ 和 μ 不能等于零．

除了上面这些曲线，空间曲线的内在方程一般都很复杂．

在计算几何中有一种力学样条曲线，用于表示船体等线型中光顺的空间轮廓线，这是一种“漂亮”的空间曲线．它的内在方程为

$$\begin{cases} k^2\tau=\text{常数}, \\ k=k(s), \end{cases}$$

其中 $k(s)$ 是一种特殊函数，叫做 $\mathscr{P}$ 椭圆函数．

第二章

曲面论

微分几何研究的对象是光滑的曲线和曲面. 环视我们周围,天上、地下、海中,到处可见到各式各样的曲面,如:飞机机身,汽车外壳,轮船船体,涡轮叶片,螺旋桨叶,薄壳屋顶,机耕犁面,飞行头盔,冲压模具,乃至艺术雕塑,等等.

平面和二次曲面都是简单的曲面. 在空间解析几何课程中,二次曲面的分类已经解决. 但是,对一般曲面的讨论则在解析几何范围之外.

在这里,我们研究一般的光滑曲面的几何性质. 如在上一章所述,一条曲线的几何性质是用它的弧长、曲率和挠率这三项基本的几何量来描写的. 在曲面的场合,我们所用的基本几何量是第一基本形式和第二基本形式(本章第三节),而且从它们作出法曲率和测地曲率(本章第四、第六)来刻划曲面的弯度.

本章仅限于对曲面的局部性质的讨论,着重点在于工程技术问题中的应用.

第一节 曲面的表示

1.1 向量方程

在空间直角坐标系中,曲面方程有三种表示形式:

(1) 显式方程

$$z=f(x, y).$$

(2) 隐式方程

$$F(x, y, z)=0.$$

(3) 参数方程

$$\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \quad (u, v)\in D. \\ z=z(u, v) \end{cases}$$

(1)和(2)都是(3)的特殊情况．如果用向量来表示，曲面的方程可写为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v)\in D. \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 如前表示曲面上一点的位置向量

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

而且右边代表两参数 u、v 的向量函数：

$$\boldsymbol{r}(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{i}+y(u, v)\boldsymbol{j}+z(u, v)\boldsymbol{k}, \quad (u, v)\in D.$$

D 表示向量函数的定义域．以下，我们假定向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 充分光滑，即它具有我们所需要的任意阶偏导数．

我们也可把方程(1.1)写成分量形式

$$\boldsymbol{r}=\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}, \quad (u, v)\in D. \tag{1.2}$$

按照映射观点，我们把曲面 S 的向量方程(1.2)看成一个从参数(u, v)平面 R^2 上的定义域 D 中的点到三维欧氏空间 E^3 中的映射：

$$(u, v)\to\{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}.$$

在这个映射下，D 的象集构成 E^3 中的一个曲面 S(图 2–1)．

设(u_0, v_0)是 D 中任一固定点．如果在参数平面上固定参数 $v=v_0$，而让参数 u 在 D 中变动，则曲线(u, v_0)被映射到 S 上的一条曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v_0), \tag{1.3}$$

称为曲面 S 上过 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$点的 u 坐标曲线，简称 u 曲线

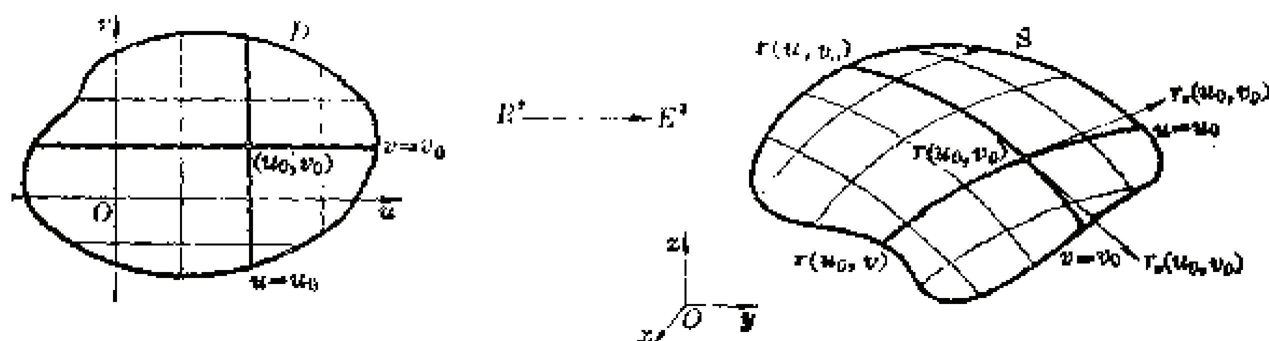


图 2-1

$(v=v_0)$. 同样, 当参数 $u=u_0$ 固定, 而 v 在 D 中变动时, 就得到曲面 S 上过 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ 点的 v 曲线 $(u=u_0)$:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0, v). \tag{1.4}$$

这样, 过曲面 S 上每个点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$, 一般有一条 u 曲线和一条 v 曲线, 它们的全体构成曲面 S 上的参数曲线网, 简称为坐标网(图 2-1).

我们将向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的各阶偏导数简记成

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{r}_v=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad \boldsymbol{r}_{uu}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2},$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^2}, \quad \boldsymbol{r}_{uv}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u\,\partial v},$$

等等. 其中, 向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的偏导数就是分别对各分量求相应的偏导数, 如

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=\left\{\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}\right\}.$$

u 曲线和 v 曲线在点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ 处的切向量分别是 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$.

1.2 法向量

取定了曲面 S 上的一条曲线 C, 我们便可用参数平面 R^2 上的参数方程

$$C: \begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t), \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b$$

来表示它，这个表示式称为曲线 C 的参数方程．曲线 C 的映射关系是

$$t \to (u(t),\ v(t)) \to \boldsymbol{r}(u(t),\ v(t)).$$

曲线 C 的向量方程是

$$C:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),\ v(t)).$$

设 C 通过曲面上的点 P，其对应参数为 t．按照复合函数的求导法则，曲线 C 在 P 点的切向量是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}, \qquad (1.5)$$

其中 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 分别代表 u 曲线和 v 曲线在同一点的切向量（图 2-2）．

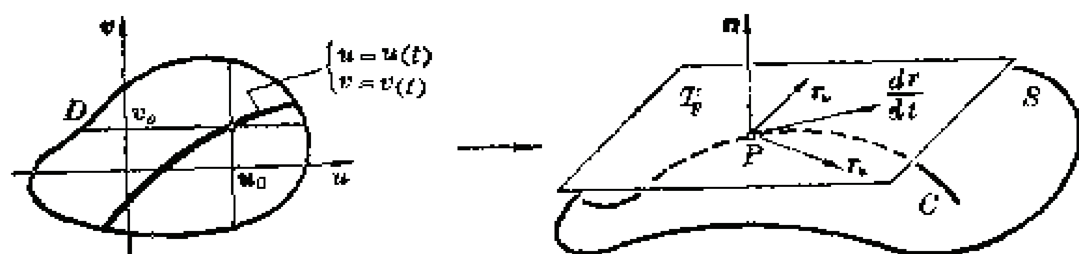


图 2-2

(1.5)式表明，在 P 点，当 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$，即 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 不平行时，曲面 S 上过 P 点的任意一条曲线 C，其切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 落在一张由 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 张成的平面 T_P 上．

我们称 T_P 为曲面 S 在 P 点的切平面，称 T_P 的法向量 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 为曲面 S 在 P 点的法向量．曲面 S 在 P 点的单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \qquad (1.6)$$

(见图 2-2). 设$(u_0, v_0)\in D$, 若

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\big|_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}\neq 0,$$

则称$\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$为曲面 S 的正则点, 否则, 称为奇点. 当 S 上无奇点时, 称 S 为正则曲面. 今后, 凡是讲到曲面, 都是指正则曲面. 我们附加"正则"这一条件的原因, 在于保证曲面处处存在着切平面和法向量.

设 P 点对应于参数(u, v), 则切平面 T_P 的方程为

$$\boldsymbol{n}(u, v)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(u, v))=0, \tag{1.7}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}=\{x, y, z\}$ 代表切平面 T_P 上的动点的位置向量.

过 P 点的法线方程是

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\boldsymbol{r}(u, v)+t\boldsymbol{n}(u, v)\quad(-\infty<t<+\infty),$$

这里, (u, v)被视为固定参数, 而且 t 代表直线的参数.

下面, 我们介绍一种管状弯曲的曲面, 它在工程管道设计中有用.

【例】 设 C: $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(s)$ 是弧长参数 s 的正则挠曲线, $\{k(s), \tau(s), \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ 分别是 C 的曲率、挠率和弗雷耐标架. 假定 $k(s)<\dfrac{1}{a}$ (a 为某正常数), 作曲面

$$S:\ \boldsymbol{r}(s, v)=\boldsymbol{\rho}(s)+a[\boldsymbol{N}(s)\cos v+\boldsymbol{B}(s)\sin v], \tag{1.8}$$

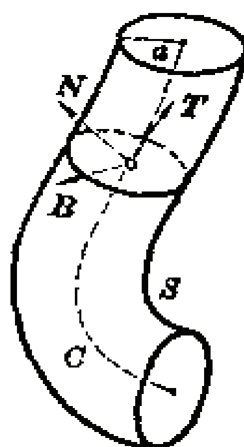


图 2-3

式中 v 表示另一参数. 我们称它为管曲面(图 2-3).

下面证明 S 是正则曲面, 并求出 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$.

解: 曲面 S 的参数是(s, v). 将(1.8)式两边分别对 s 和 v 求偏导数:

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_s=(1-ak\cos v)\boldsymbol{T}-a\tau\sin v\boldsymbol{N}+a\tau\cos v\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{r}_v=-a\sin v\boldsymbol{N}+a\cos v\boldsymbol{B}.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_v=-a(1-ak\cos v)(\cos v\boldsymbol{N}+\sin v\boldsymbol{B}).$$

由已知条件 $k<\dfrac{1}{a}$ 得知 $1-ak\cos v>0$. 而且

$$|\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_v|=a(1-ak\cos v)\neq 0,$$

这就表明了 S 是正则曲面，按照(1.6)式求得曲面 S 的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=-(\cos v\boldsymbol{N}(s)+\sin v\boldsymbol{B}(s)). \qquad (1.9)$$

习 题 一

1. 证明曲面

(1) $\boldsymbol{r}=\{\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\}\quad\begin{pmatrix}0<\theta<2\pi\\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}$

是单位球面;

(2) $\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ b\cos\varphi\sin\theta,\ c\sin\varphi\}\quad\begin{pmatrix}0<\theta<2\pi\\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}$

是椭圆面，三个半轴为 a、b、c;

(3) $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ cv\}\quad\begin{pmatrix}0<u<2\pi\\ -\infty<v<+\infty\end{pmatrix}$

是半顶角为 $\omega=\operatorname{ctg}^{-1}c$ 的圆锥面;

(4) $\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ v\}\quad\begin{pmatrix}0<u<2\pi\\ -\infty<v<+\infty\end{pmatrix}$

是圆柱面，它的对称轴是 z 轴，半径为 a;

(5) $\boldsymbol{r}=\left\{u,\ v,\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}\right)\right\}\quad(-\infty<u,\ v<+\infty)$

是椭圆抛物面;

(6) $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\}\quad(-\infty<u,\ v<+\infty)$

是双曲抛物面;

(7) $\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}u\cos v,\ b\operatorname{ch}u\sin v,\ c\operatorname{sh}u\}\quad\begin{pmatrix}-\infty<u<+\infty\\ 0<v<2\pi\end{pmatrix}$

是单叶双曲面;

(8) $\boldsymbol{r}=\{a\,\mathrm{ch}\,u,\ b\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\ c\,\mathrm{sh}\,u\sin v\}$ $\left(\begin{matrix}-\infty<u<+\infty\\ 0<v<2\pi\end{matrix}\right)$

是双叶双曲面.

画出上列各曲面的图形.

2. 求上题中各曲面的法向量.

1.3 参数变换

平面上常用的坐标系有直角坐标系 $(x,\ y)$ 和极坐标系 $(\rho,\ \varphi)$，两者的变换关系式在适当的选择下是

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}\tag{1.10}$$

这时，雅可比式是

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\rho,\ \varphi)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

在坐标原点，$\rho=0$. 除了原点以外，雅可比式在全平面上均不等于零. 这表明了由(1.10)决定的坐标变换

$$(x,\ y)\rightarrow(\rho,\ \varphi),$$

除了坐标原点外，是一一对应的.

在曲面上，也有相仿的曲线坐标变换：

$$(u,\ v)\rightarrow(\bar{u},\ \bar{v})$$

称为曲面的参数变换. 变换式如下：

$$\begin{cases}u=u(\bar{u},\ \bar{v})\\ v=v(\bar{u},\ \bar{v}).\end{cases}\tag{1.11}$$

为了保证变换一一对应，必须假定雅可比式

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(\bar{u},\ \bar{v})}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\bar{u}} & \dfrac{\partial u}{\partial\bar{v}}\\ \dfrac{\partial v}{\partial\bar{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\bar{v}}\end{vmatrix}\neq0.\tag{1.12}$$

经过参数变换(1.11)，曲面的向量方程成为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(\bar{u},\ \bar{v}),\ v(\bar{u},\ \bar{v})).$$

将上式两边分别对新参数 $\bar{u}$、$\bar{v}$ 求偏导数：

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_{\bar{u}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}\\ \boldsymbol{r}_{\bar{v}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}.\end{cases}$$

曲面在新参数下的法向量

$$\boldsymbol{r}_{\bar{u}}\times\boldsymbol{r}_{\bar{v}}=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(\bar{u},\ \bar{v})}. \tag{1.13}$$

因此，曲面的法线方向同参数变换无关．同样，曲面的正则性也是如此．

1.4 举例

这里所提供的都是典型曲面的例子，它们在以后的论述中是经常被引用到的．所使用的坐标系都是直角坐标系．

(1) 圆柱面　设圆柱面以 z 轴为对称轴，它的半径为 a．那末，它的方程是

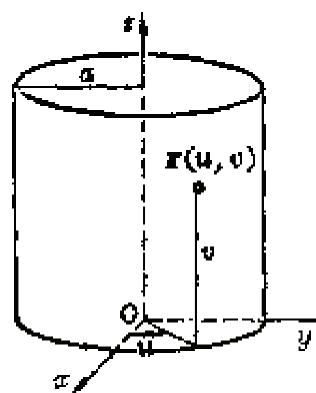


图　2-4

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ v\}$$
$$\begin{pmatrix}0<u<2\pi\\ -\infty<v<+\infty\end{pmatrix}.$$

坐标曲线的切向量为

$$\boldsymbol{r}_u=\{-a\sin u,\ a\cos u,\ 0\},$$
$$\boldsymbol{r}_v=\{0,\ 0,\ 1\}.$$

单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=\{\cos u,\ \sin u,\ 0\}.$$

(2) 球面　在以球心为原点的坐标系下，半径为 a 的球面的方程可写为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi\}\ \left(\begin{array}{c}0<\theta<2\pi\\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right).$$

这时，两族坐标曲线是球面上的纬圆(θ 曲线)和经圆(φ 曲线)．坐标曲线的切向量分别是

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-a\cos\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\cos\theta,\ 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{-a\sin\varphi\cos\theta,\ -a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\}.$$

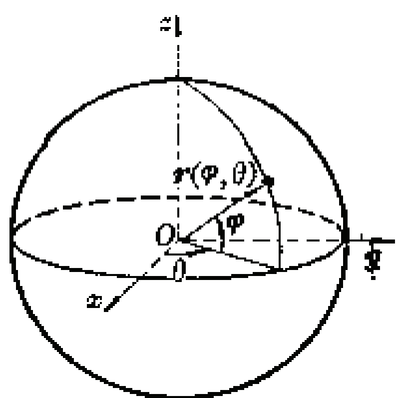


图 2-5

单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi}{|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi|}=\{\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\}.$$

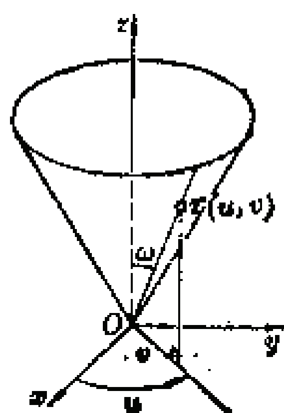


图 2-6

(3) 圆锥面　在以顶点为原点、对称轴为 z 轴的坐标系下，半顶角 ω 的圆锥面的方程可写为

$$\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ Cv\}$$

$$\left(\begin{array}{c}0<u<2\pi\\ -\infty<v<+\infty\end{array}\right),$$

式中的常数 $C=\operatorname{ctg}\omega$．从

$$\boldsymbol{r}_u=\{-v\sin u,\ v\cos u,\ 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{\cos u,\ \sin u,\ C\},$$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{Cv\cos u,\ Cv\sin u,\ -v\}$$

可知：在顶点处，$v=0$，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=0$，所以顶点是奇点．为了保证曲面处处正则，必须除去顶点，即假定 $v\neq0$．

单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=\{\cos\omega\cos u,\ \cos\omega\sin u,\ -\sin\omega\},$$

它与参数 v 无关．

(4) 旋转面　将 Oxz 平面中一条曲线

$$C:\ \begin{cases} x=f(v) \\ z=g(v) \end{cases} \qquad (\alpha<v<\beta)$$

绕 z 轴旋转一周时，所生成的曲面称为**旋转面**，其方程可写为

$$\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}\quad \begin{pmatrix} 0<u<2\pi \\ \alpha<v<\beta \end{pmatrix}.$$

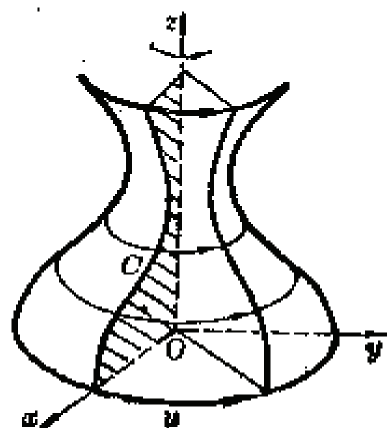


图 2-7

曲线 C 称为旋转面的**母线**，u 曲线称为**纬线**。显然，所有的纬线都是圆。v 曲线称为**经线**，每条经线都落在过 z 轴的一张平面上，而且与曲线 C 合同(图 2-7)。从

$$\boldsymbol{r}_u=\{-f\sin u,\ f\cos u,\ 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{f'\cos u,\ f'\sin u,\ g'\},$$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{fg'\cos u,\ fg'\sin u,\ -ff'\}$$

得出单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}\{g'\cos u,\ g'\sin u,\ -f'\}.$$

(5) 螺旋面　如果使上例中的曲线 C 绕 z 轴旋转 u 角的同时，还沿 z 轴上升距离 bu(b 是常数)，那末，由曲线 C 的这种运动所生成的曲面称为**螺旋面**。它的方程可写为

$$\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)+bu\}$$

$$\begin{pmatrix} 0<u<2\pi \\ \alpha<v<\beta \end{pmatrix}.$$

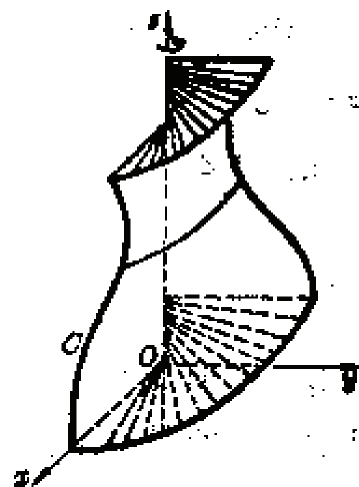


图 2-8

螺旋面的每条 u 曲线是圆柱螺线，每条 v 曲线落在过 z

轴的一张平面上，而且合同于曲线 C. C 称为母曲线．螺线的螺距等于 $2\pi b$(图 2-8)．从

$$\boldsymbol{r}_u=\{-f\sin u,\ f\cos u,\ b\},$$
$$\boldsymbol{r}_v=\{f'\cos u,\ f'\sin u,\ g'\}$$

得出

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{fg'\cos u-bf'\sin u,\ bf'\cos u+fg'\sin u,\ -ff'\},$$

$$\boldsymbol{n}=[(fg')^2+(bf')^2+(ff')^2]^{-\frac{1}{2}}\times\{fg'\cos u-bf'\sin u,\ bf'\cos u+fg'\sin u,\ -ff'\}.$$

特别，取 $f(v)=v,\ g(v)=0$，即当曲线 C 为 x 轴时，所生成的螺旋面称为正螺面．这是一种最常用的螺旋面．机械螺杆大多由这种螺面所构成．这时

$$\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ bu\},$$

其单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}\{-b\sin u, b\cos u, -v\}.$$

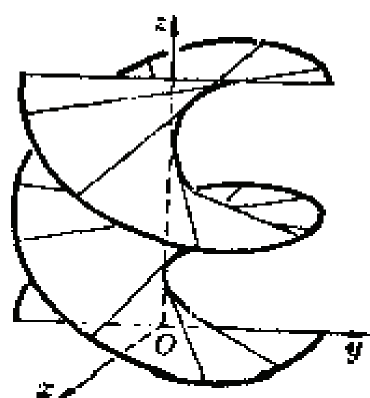


图 2-9

下面我们介绍三种特殊的旋转曲面．

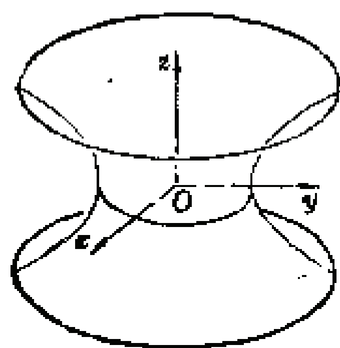


图 2-10

(6) 悬链面　设曲线 C 是 Oxz 平面上一条悬链线

$$C:\ \begin{cases} x=f(v)=a\,\mathrm{ch}\dfrac{v}{a} \\ y=g(v)=v \end{cases}$$

$(-\infty<v<+\infty)$，

它所生成的旋转面为悬链面(图 2-10)：

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\,\mathrm{ch}\frac{v}{a}\cos u,\ a\,\mathrm{ch}\frac{v}{a}\sin u,\ v\right\}.$$

单位法向量为

$$n=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{v}{a}}\left\{\cos u,\ \sin u,\ -\operatorname{sh}\frac{v}{a}\right\}.$$

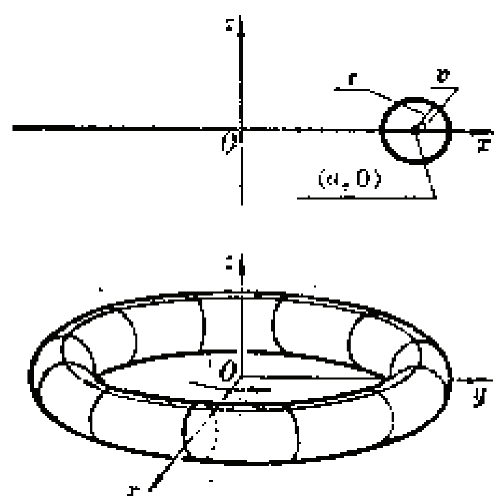


图 2-11

(7) 环面 设曲线 C 为 Oxz 平面上的以 $(a,\ 0)$ 为中心、半径为 r 的圆. 它的参数表示如下:

$$C:\ \begin{cases} x=f(v)=a+r\cos v \\ y=g(v)=r\sin v \end{cases}$$

$$(0<v<2\pi).$$

这时, 所生成的旋转面称为环面. 它和一只汽车轮胎相似(图 2-11). 从环面方程

$$r=\{(a+r\cos v)\cos u,\ (a+r\cos v)\sin u,\ r\sin v\}$$

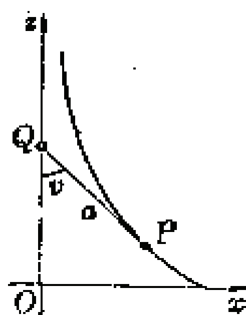
$$(0<u,\ v<2\pi)$$

得出单位法向量为

$$n=\{\cos v\cos u,\ \cos v\sin u,\ \sin v\}.$$

(8) 伪球面 设曲线 C 为 Oxz 平面上的曳物线:

$$C:\ \begin{cases} x=f(v)=a\sin v \\ z=g(v)=-a\left(\cos v+\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right) \end{cases}\quad\left(0<v<\frac{\pi}{2}\right),$$



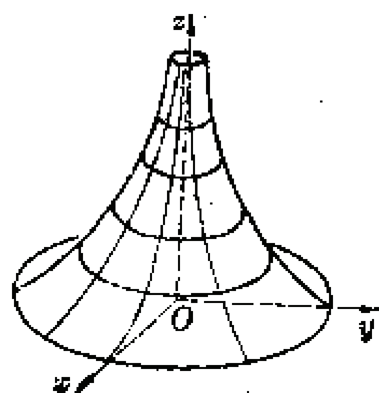


图 2-12

所生成的旋转面称为伪球面(图 2-12)：

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\sin v\cos u,\ a\sin v\sin u,\ -a\left(\cos v+\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right)\right\}$$

$$\left(\begin{array}{c}0<u<2\pi\\0<v<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right).$$

单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=-\{\cos v\cos u,\ \cos v\sin u,\ \sin v\}.$$

(9) 柱面　给定常向量 $\boldsymbol{l}$ 和空间曲线

$$C:\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)\quad(\alpha<u<\beta),$$

过 C 上的每一点作一条方向为 $\boldsymbol{l}$ 的直线. 这些直线所生成的曲面是柱面(图 2-13)：

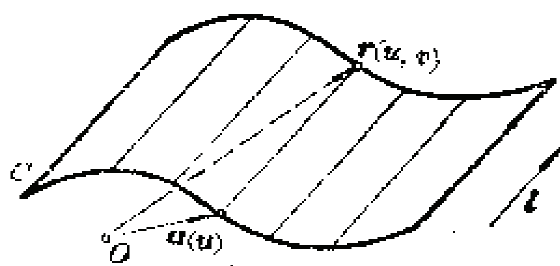


图　2-13

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}\quad\left(\begin{array}{c}\alpha<u<\beta\\-\infty<v<+\infty\end{array}\right).$$

切向量和单位法向量分别为

$$\boldsymbol{r}_u=\dot{\boldsymbol{a}},\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{l},$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{l}}{|\dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{l}|}.$$

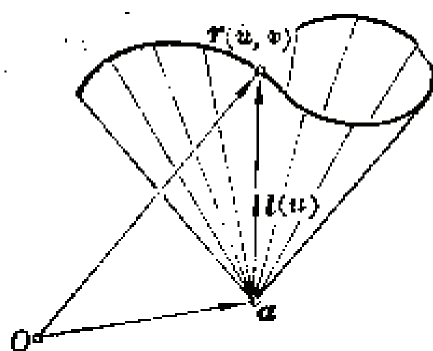


图　2-14

(10) 锥面　当一条动直线 L_u 通过定点 P 时，就生成一个锥面(图 2-14). 设点 P 的位置向量为 $\boldsymbol{a}$，动直线的方向为 $\boldsymbol{l}(u)$，则锥面方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{l}(u)\quad\left(\begin{array}{c}\alpha<u<\beta\\-\infty<v<+\infty\end{array}\right).$$

切向量和单位法向量分别为

$$\boldsymbol{r}_u = v\dot{\boldsymbol{l}},\quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{l},$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dot{\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{l}}{|\dot{\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{l}|}.$$

(11) 切线面　给定一条空间曲线

$$C:\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(u)\quad (\alpha<u<\beta),$$

过 C 上的每一点作切线，切线全体所组成的曲面称为 C 的切线面(图 2-15)．C 称为切线面的脊线．切线面的方程为

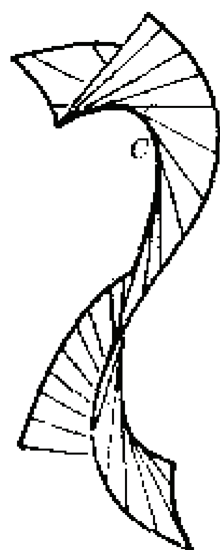


图 2-15

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\dot{\boldsymbol{a}}(u)\quad \begin{pmatrix}\alpha<u<\beta\\ -\infty<v<+\infty\end{pmatrix},$$

切向量为

$$\boldsymbol{r}_u = \dot{\boldsymbol{a}} + v\ddot{\boldsymbol{a}},\quad \boldsymbol{r}_v = \dot{\boldsymbol{a}}.$$

从切线面中挖去脊线($v=0$)后，剩余的曲面是正则的．在它的任一点的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\ddot{\boldsymbol{a}}\times\dot{\boldsymbol{a}}}{|\ddot{\boldsymbol{a}}\times\dot{\boldsymbol{a}}|}.$$

(12) 设曲面的隐函数方程为 $F(x, y, z)=0$，它的法向量可写为梯度向量

$$\nabla F = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\}.$$

实际上，对于曲面上的任意一条曲线

$$C:\ \boldsymbol{r} = \{x(t), y(t), z(t)\},$$

有下面的恒等式成立：

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0.$$

两边对 t 求导：

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0,$$

即
$$\nabla F\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0,$$

∇F 垂直于曲线 C 的切向量 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. 由于曲线方向的任意性，便知 ∇F 是曲面的法向量.

习 题 二

1. 设曲面的表示式为 $z=f(x, y)$, 求它的法向量.
2. 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{u+v,\ u-v,\ uv\}$ 在 $u=1$, $v=-1$ 点处的单位法向量和切平面方程.
3. 在例(5)中, 把母曲线 C 取作一条与 Oxy 平面相交于定角 ω 的直线, 这时所生成的螺旋面称为*阿基米德螺旋面*, 它在机械工程中可以作为蜗杆的齿面, 试写出它的方程来.
4. 试证明: 在旋转面 $\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}$ $(g'(v)\neq0)$ 上任一点所作的曲面法线一定和 z 轴相交.

第二节 直 纹 面

2.1 直纹面

由一族连续变动的直线构成的曲面称为*直纹面*. 这些直线是直纹面的*母线*. 读者学过的单叶双曲面、双曲抛物面、正螺面、柱面、锥面和切线面等, 都是直纹面.

由于直纹面的几何构造比较简单, 而且在工程技术中设计容易, 制造简单, 相当有用, 它是一类重要的特殊曲面.

在直纹面上选取一条同每条母线都相交的曲线

$$C:\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)\quad(\alpha<u<\beta),$$

即*准线*. 过 C 上的 u 点引直纹面的母线, 设其方向为 $\boldsymbol{l}(u)$,

于是直纹面的方程可写为(图 2-16)：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)\quad\begin{pmatrix}\alpha<u<\beta\\-\infty<v<+\infty\end{pmatrix},\qquad(2.1)$$

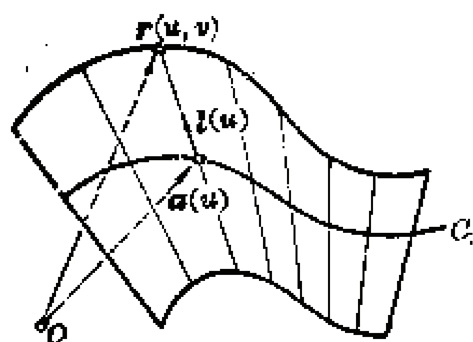


图 2-16

v 曲线是母线. 从

$$\boldsymbol{r}_u=\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}},\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{l}$$

得出单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{(\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}}{|(\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}|}.\qquad(2.2)$$

在直纹面的实际构造中，常常采用单位向量函数 $\boldsymbol{l}(u)$.

下面介绍的四种直纹面，在建筑和机械等工程的曲面造型中都有实际的应用.

【例 1】 单叶双曲面

在 Oxy 平面上取单位圆 C 作为准线，这时，

$$C:\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)=\{\cos u,\ \sin u,\ 0\}.$$

设母线的方向向量为

$$\boldsymbol{l}(u)=\dot{\boldsymbol{a}}(u)+\boldsymbol{k}=\{-\sin u,\ \cos u,\ 1\}.$$

这样构造出来的直纹面是

$$S:\ \boldsymbol{r}=\{\cos u-v\sin u,\ \sin u+v\cos u,\ v\}.\qquad(2.3)$$

设 S 上一点的坐标为 x、y、z，那末容易看出

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

所以 S 是单叶双曲面(图 2-17).

另一方面，若取方向为

$$\boldsymbol{l}^*(u)=-\dot{\boldsymbol{a}}(u)+\boldsymbol{k}=\{\sin u,\ -\cos u,\ 1\}$$

的直线为母线，于是得出另一直纹面 S^*，方程也是 $x^2+y^2-z^2=1$. 即：S^* 与 S 合同. 这就是说，单叶双曲面上存在两族直线的母线，它们的方向分别是 $\boldsymbol{l}(u)$ 和 $\boldsymbol{l}^*(u)$.

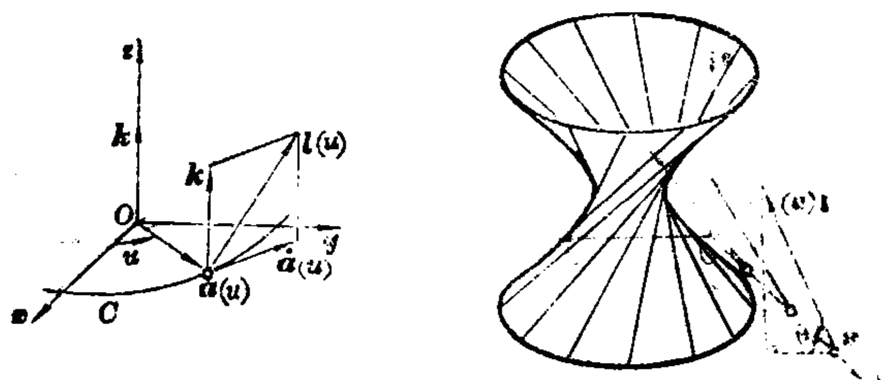


图 2-17

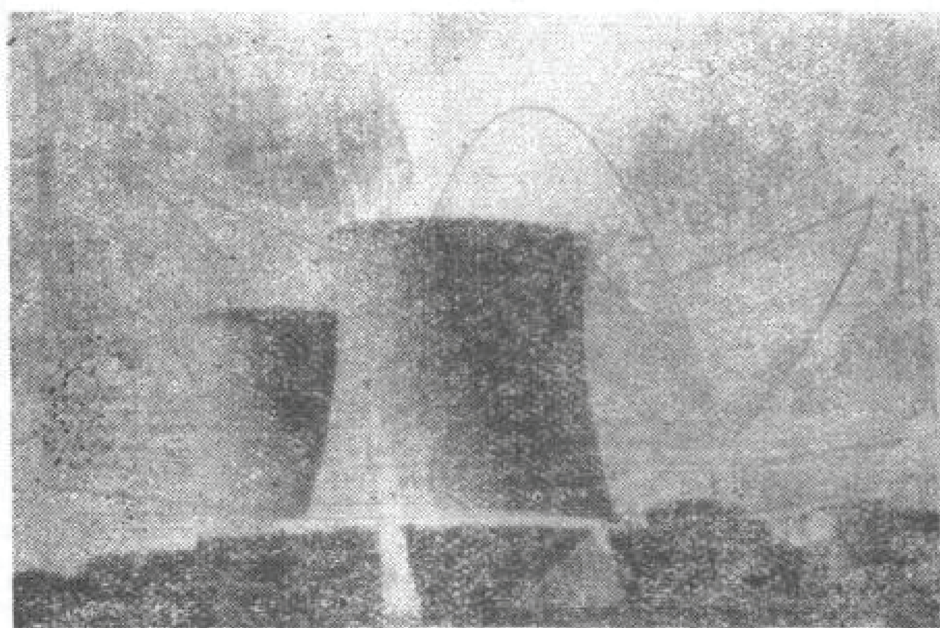


图 2-18

许多火电站的冷却塔都具有单叶双曲面的形状(图 2-18)，它具有强度高、材料省等优点.

【例 2】 双曲抛物面

设 x 轴为准线 C，母线平行于 Oyz 平面而且和 Oxy 平面的夹角为 $\theta=\mathrm{tg}^{-1}u$. 于是

$$\boldsymbol{l}(u)=\{0,\ 1,\ u\}.$$

这样决定的直纹面具有方程

$$z=xy,$$

它是单叶双曲面(图 2-19).

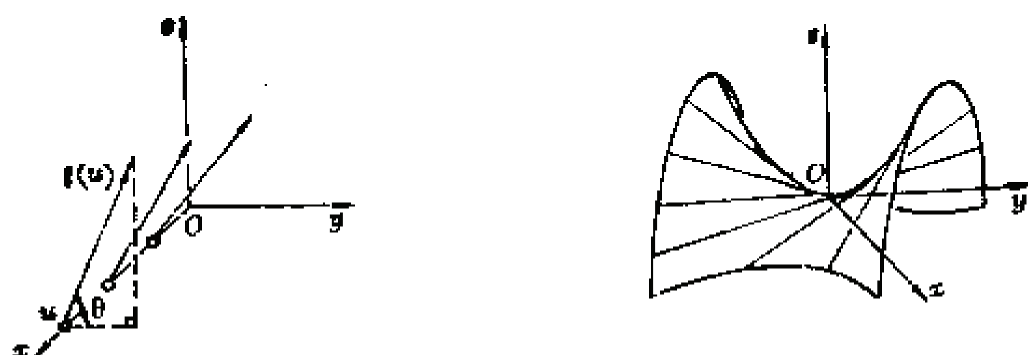
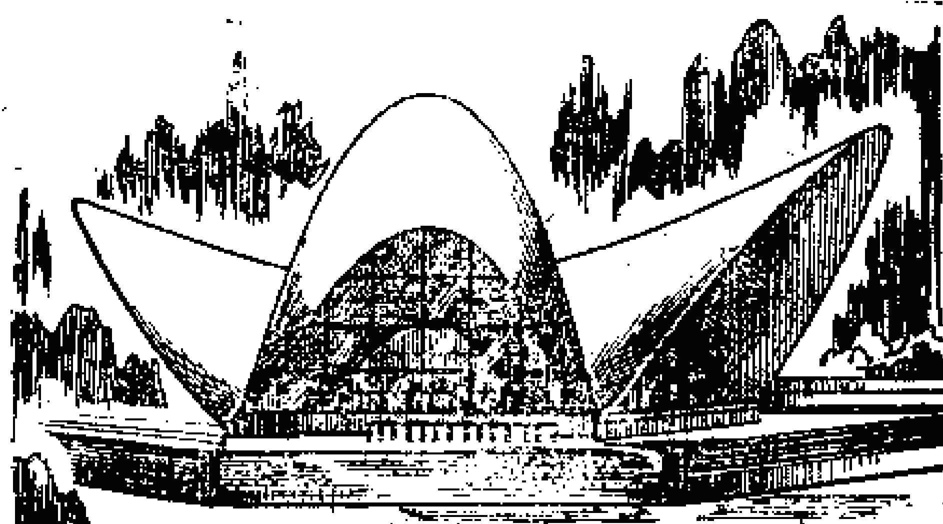


图 2-19


图 2-20

一些现代建筑物的屋顶，常常采用薄壳结构．图 2-20 是某餐厅的屋顶，用的是组合双曲抛物面．这种结构，新颖美观，别具一格．

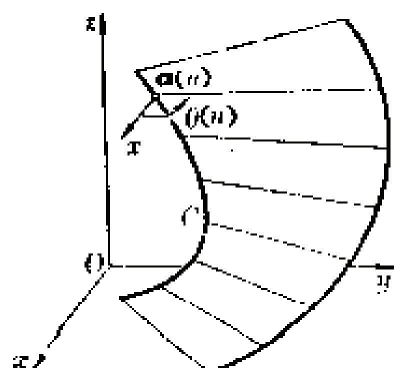


图 2-21

【例 3】 扭柱面

当作为母线的直线恒平行于固定平面时，我们得到扭柱面(图 2-21)．

如果取这固定平面作为 Oxy 平面，那末从

$$l(u)=\{\cos\theta(u),\ \sin\theta(u),\ 0\}$$

便得出扭柱面的方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\{\cos\theta(u),\ \sin\theta(u),\ 0\}.$$

有一种叫做保加利亚犁的机耕犁面，就是扭柱面．它的设计过程是：设计员首先确定准线 C（通常选用 Oxz 平面上的抛物线），选取 z 作为参数 u，然后通过调整角函数 $\theta=\theta(z)$ 来选择设计性能较佳的犁面（图 2-22）．

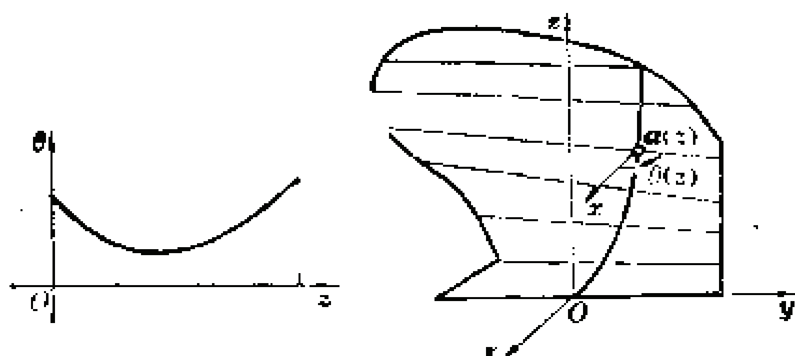


图 2-22

取 z 轴作为准线 C，这种扭柱面称为劈锥曲面（图 2-23），方程为

$$\boldsymbol{r}=\{v\cos\theta(u),\ v\sin\theta(u),\ u\}.$$

【例 4】 混合直纹面

对于两条给定的曲线

$$C_1:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_1(u),\quad \alpha<u<\beta,$$

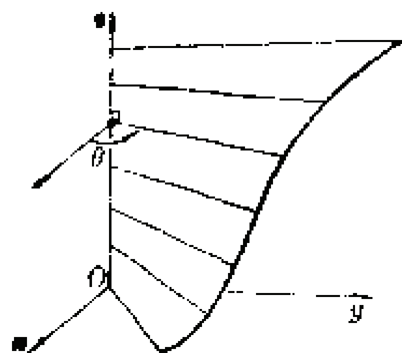


图 2-23

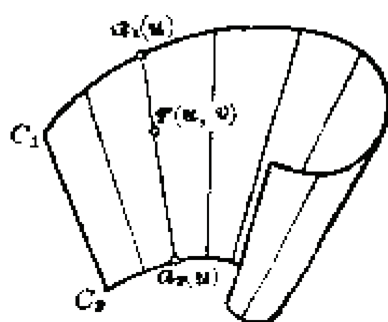


图 2-24

$$C_2:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_2(u),\quad \alpha<u<\beta,$$

我们令曲线 C_1 与 C_2 上有同一参数值 u 的两点为对应点，并且用直线段连接每对对应点．这些直线段构成一个直纹面，称为混合直纹面（图 2-24）：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_2(u)+v[\boldsymbol{a}_1(u)-\boldsymbol{a}_2(u)]\quad \begin{pmatrix}\alpha<u<\beta\\ 0<v<1\end{pmatrix}.$$

在工程上经常取这种直纹面作为两条已知曲线 C_1 与 C_2 之间的线性插值，借以连接相邻两条曲线之间的曲面部分．这是一种最简单的插值方法．

例如图 2-25 是某船体的肋骨线型图．造船工艺部门用这张图纸作为船体曲面设计图．相邻两条肋骨之间的空隙部分，就是用混合直纹面来填补的．

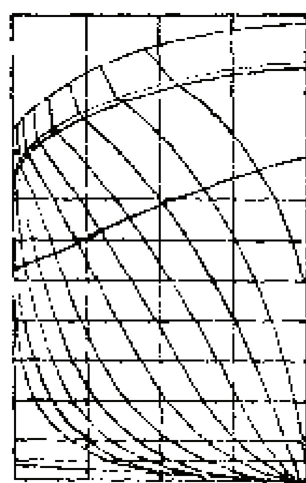


图 2-25

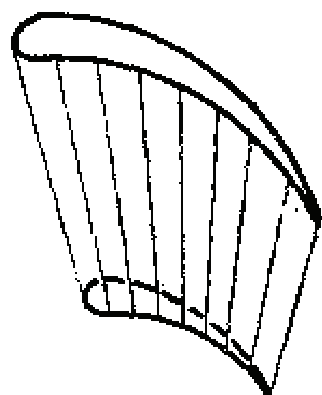


图 2-26

在设计涡轮叶片曲面工作中，一种传统的简易设计方法是：首先设计两条横截面曲线 C_1 与 C_2，然后构造 C_1 与 C_2 之间的混合直纹面，用以构造整块曲面（图 2-26）．

习 题 三

1．用构造准线 C 和母线的方向向量 $l(u)$ 的方法，证明下列曲面都是

直纹面：

(1) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；

(2) 双曲抛物面 $z=kxy$ （常数 $k\neq 0$）.

2. 求下列直纹面的单位法向量 $\boldsymbol{n}$：

(1) 单叶双曲面 $\boldsymbol{r}=\{\cos u-v\sin u,\ \sin u+v\cos u,\ v\}$；

(2) 双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{u,\ v,\ uv\}$；

(3) 劈锥曲面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos\theta(u),\ v\sin\theta(u),\ u\}$.

3.2 可展曲面

定义 如果直纹面沿着一条母线的所有切平面都相同，则称它为**可展曲面**.

本章1.4段中所举的柱面、锥面和切线面，都是可展曲面. 事实上，这三种曲面的单位法向量单独是 u 的函数：

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u).$$

另一方面，一条母线是 v 曲线，就是沿着它 $u=u_0$，所以曲面在这条母线的各点的切平面都相同.

单叶双曲面、双叶双曲面和正螺面，都是直纹面，但不是可展曲面. 例如，按照(2.3)式表示的单叶双曲面的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+2v^2}}(\{\cos u,\ \sin u,\ 0\}-v\{\sin u,\ -\cos u,\ 1\}).$$

在同一条直母线 $u=u_0$ 上不同的两点 $v=v_1$ 和 $v=v_2$ 处，它们的单位法向量 $\boldsymbol{n}(u_0,\ v_1)$ 和 $\boldsymbol{n}(u_0,\ v_2)$ 不平行，这是因为

$$\boldsymbol{n}(u_0,\ v_1)\times\boldsymbol{n}(u_0,\ v_2)$$

$$=\frac{v_1-v_2}{\sqrt{(1+2v_1^2)(1+2v_2^2)}}\{\sin u_0,\ -\cos u_0,\ -1\}\neq 0.$$

可展曲面和平面族的包络面有密切关系. 与平面曲线族的包络线相仿，对于空间曲面族也可作出包络面. 我们只须

在第一章6.4段中对有关的定义和方程增加一个变元 z，便可平行地搬到包络面的场合来.

对于给定的正则曲面族 $\{S_\lambda\}$，若存在曲面 S，使得 S 上每一点与族中某一张曲面 S_λ 相切，则称 S 是曲面族 $\{S_\lambda\}$ 的**包络面**.

设给定的正则曲面族方程为

$$S_\lambda:\ F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0,$$

$(x,\ y,\ z)$ 表示曲面 S_λ 上一点的坐标，λ 是参数. 因为 $\{S_\lambda\}$ 只依赖于一个参数，故也称它为**单参数曲面族**. $\{S_\lambda\}$ 的包络面方程是

$$S:\ \begin{cases} F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0. \end{cases}$$

单参数平面族的包络面是直纹面，这一结论的证明在此省略.

定理1 曲面 S 为可展曲面的充要条件是：S 是单参数平面族的包络面.

【证】 先证必要性：设 S 是可展曲面. 根据定义，沿着 S 的直母线，切平面都相同. 由于直纹面的直母线依赖于单参数，曲面 S 的切平面是单参数族，因此，S 是单参数平面族的包络面.

其次证充分性：设 S 是单参数平面族的包络面，因而是直纹面，且沿着同一直母线，曲面的单位法向量 $\boldsymbol{n}=$ 常向量. 按照定义，S 是可展曲面. 证毕. ▌

定理2 直纹面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)$ 为可展曲面的充要条件是

$$(\dot{\boldsymbol{a}},\ \boldsymbol{l},\ \dot{\boldsymbol{l}})=0.$$

【证】 先证必要性：从直纹面的切向量及法向量

$$\boldsymbol{r}_u=\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}},\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{l},$$
$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}$$
得知：如果直纹面是可展曲面，则在一条母线（u 固定）的两个不同点（参数分别为 v_1、v_2）的曲面法向量必须平行，所以
$$[(\dot{\boldsymbol{a}}+v_1\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}]\times[(\dot{\boldsymbol{a}}+v_2\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}]=0,$$
即
$$(v_2-v_1)(\dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{l})\times(\dot{\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{l})=0.$$
但是 $v_1\neq v_2$，所以
$$(\dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{l})\times(\dot{\boldsymbol{l}}\times\boldsymbol{l})=0.$$
将上式左边按照二重向量积公式展开，便有
$$(\dot{\boldsymbol{a}},\ \boldsymbol{l},\ \dot{\boldsymbol{l}})=0.$$
关于充分性的证明，我们只要把上述讨论的过程依次颠倒过来，便可断定：所论的直纹面是可展曲面．】

定理 3 可展曲面只有三种，即柱面、锥面和切线面．

【证】 定理的充分性是显然的．我们只须证必要性．根据定理 2，可展曲面
$$S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)\tag{2.4}$$
满足条件
$$(\dot{\boldsymbol{a}},\ \boldsymbol{l},\ \dot{\boldsymbol{l}})=0.$$
我们不妨将 $\boldsymbol{l}(u)$ 取作单位向量．下面分两种情况进行讨论．

(1) $\boldsymbol{l}\times\dot{\boldsymbol{l}}=0$ 因为 $\boldsymbol{l}(u)$ 是单位向量，有 $\boldsymbol{l}\cdot\dot{\boldsymbol{l}}=0$ 成立，从而 $\dot{\boldsymbol{l}}=0$，$\boldsymbol{l}$ 是常向量．在这种情况，S 是柱面．

(2) $\boldsymbol{l}\times\dot{\boldsymbol{l}}\neq0$ 首先，我们作参数变换，将方程(2.4)换成
$$S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}(u)+s\boldsymbol{l}(u),\tag{2.5}$$
式中向量函数 $\boldsymbol{b}(u)$ 满足条件
$$\dot{\boldsymbol{b}}\cdot\dot{\boldsymbol{l}}=0,\tag{2.6}$$
即 $\dot{\boldsymbol{b}}(u)\perp\dot{\boldsymbol{l}}(u)$．事实上，只要令
$$\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{a}(u)+\varphi(u)\boldsymbol{l}(u),$$

其中函数 $$\varphi(u)=-\frac{\dot{\boldsymbol{a}}\cdot\dot{\boldsymbol{l}}}{\dot{\boldsymbol{l}}\cdot\dot{\boldsymbol{l}}}$$

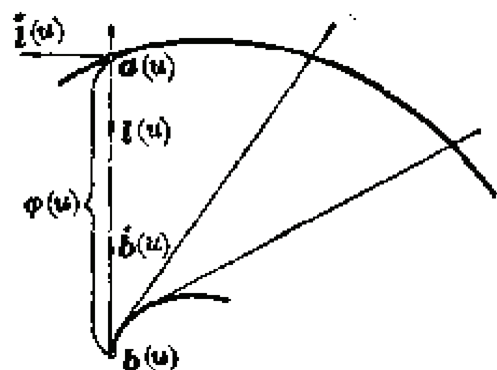


图 2-27

以及参数变换

$$\begin{cases} u=u \\ s=v-\varphi(u), \end{cases}$$

方程(2.4)就变成(2.5)，且 $\dot{\boldsymbol{b}}\perp\dot{\boldsymbol{l}}$.

从图 2-27 可看出，整个变换过程不过是把直纹面 S 的准线 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$ 换成 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(u)$，以让新的准线满足条件(2.6).

在新参数(u, s)下，按照(2.5)表示的曲面 S 为可展的条件变为

$$(\dot{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{l}, \dot{\boldsymbol{l}})=0. \tag{2.7}$$

现在再细分两种情况来考察：

（i） $\dot{\boldsymbol{b}}\neq 0$　条件(2.7)表明三向量 $\dot{\boldsymbol{b}}$、$\boldsymbol{l}$、$\dot{\boldsymbol{l}}$ 共面. 由条件(2.6)知 $\dot{\boldsymbol{b}}\perp\dot{\boldsymbol{l}}$，且单位向量 $\boldsymbol{l}\perp\dot{\boldsymbol{l}}$，因此 $\boldsymbol{l}\parallel\dot{\boldsymbol{b}}$，即直纹面 S 的母线是 $\boldsymbol{b}$ 的切线，因此，S 是切线面，准线 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(u)$ 就是它的脊线.

（ii） $\dot{\boldsymbol{b}}=0$　此时 $\boldsymbol{b}$ 为常向量，准线退缩成一点，因此，S 是锥面. ▌

习　题　四

1．证明下列曲面是非可展的直纹面：

(1) 双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\}$;

(2) 正螺面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ bu\}$.

2．证明曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u^2+\frac{1}{3}v,\ 2u^3+uv,\ u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}$是可展曲面.

3．证明曲面 $\boldsymbol{r}=\{\cos v-(u+v)\sin v,\ \sin v+(u+v)\cos v,\ u+2v\}$ 是

是圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{\cos v, \sin v, v\}$ 的切线曲面.

4. 一条曲线的主法线和从法线所生成的直纹面分别称为**主法线曲面**和**从法线曲面**. 试证明:

   (1) 圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$ 的主法线曲面是正螺面;

   (2) 空间挠曲线的主法线曲面和从法线曲面都是非可展的直纹面.

5. 设曲线 C 在其一点的切线为 l, 而且切线面为 S. 试证明: S 沿着 l 的切平面合于曲线 C 在这点的密切平面.

2.3 小结

一、直纹面

由一族直线组成的曲面称为直纹面, 方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u).$$

二、可展曲面

可展曲面是一种特殊的直纹面, 在曲面论中有着理论和应用两方面的价值. 下列四个互相等价的条件, 每一个都可作为可展曲面的定义:

(1) 沿着直母线, 切平面都相同的直纹面;

(2) 单参数平面族的包络面;

(3) 满足条件 $(\dot{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{l}, \dot{\boldsymbol{l}})=0$ 的直纹面;

(4) 柱面、锥面和切线面的全体.

在本章第七节和第八节, 我们还要给出可展曲面的两个等价条件.

第三节 曲面的第一基本形式和第二基本形式

3.1 第一基本形式

设给定的曲面是

$$S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)\quad (u,\ v)\in D.$$

如前所述，S 上的曲线 C 是由参数方程

$$C:\quad \begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases}\qquad (\alpha<t<\beta)$$

表示的．C 的向量方程为

$$C:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),\ v(t))\quad (\alpha<t<\beta).$$

从此得出 C 在 P 点的切向量为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt}.$$

有时，把它写成微分形式

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv.$$

设 s 是曲线 C 的弧长．根据第一章中的(3.2)式，得 $ds=|d\boldsymbol{r}|$，因此

$$\begin{aligned} ds^2=d\boldsymbol{r}^2&=(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)^2 \\ &=\boldsymbol{r}_u^2 du^2+2\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v du dv+\boldsymbol{r}_v^2 dv^2. \end{aligned}$$

如果记

$$E=\boldsymbol{r}_u^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2, \tag{3.1}$$

便有

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \tag{3.2}$$

(3.2)的右边是关于微分 du 和 dv 的二次形式，通称曲面的第一基本形式，或者曲面的线素，有时用 I 简记它．二次形式的系数 E、F、G 是 u、v 的函数，称为曲面的第一基本量．

由(3.1)式可见

$$E=\boldsymbol{r}_u^2>0,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2>0,$$

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}=EG-F^2=\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2>0.$$

这表明了第一基本形式是正定的．通常把二次形式的系数行列式写作 g：

$$g=EG-F^2=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2. \tag{3.3}$$

第一基本形式从定义看，不但给出了曲面上曲线弧长的度量，并且用第一基本量还可以表示曲面上两条曲线的交角及面积元素.

3.2 弧长、角度、面积

(1) 弧长　从上一段可立即导出曲线 C 的弧长

$$L=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt, \tag{3.4}$$

式中$[a,\ b]$是参数 t 的区间.

(2) 角度　设在曲面 S 上给定两条相交于 $P(u,\ v)$ 点的曲线 C 和 C^*，它们在曲面上的参数方程分别为

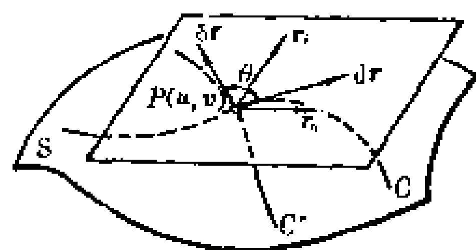


图　2-28

$$C:\ u=u(t),\qquad v=v(t);$$
$$C^*:\ u=u^*(t^*),\qquad v=v^*(t^*).$$

C 和 C^* 在交点 $P(u,\ v)$ 处的切向量为

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}&=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt},\\ \frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt^*}&=\boldsymbol{r}_u\frac{du^*}{dt^*}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv^*}{dt^*},\end{aligned} \tag{3.5}$$

都落在切平面 T_P 上(图 2-28).

曲线 C 和 C^* 在 P 点的交角就是 C 和 C^* 在 P 点的两切线之间的夹角 θ. 为了表示(3.5)中的两个不同方向，我们不妨用下列两个微分形式：

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv,\\ \delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v.\end{aligned} \tag{3.6}$$

从此得出

$$\cos\theta=\frac{d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}||\delta\boldsymbol{r}|}$$

$$=\frac{E\,du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}. \tag{3.7}$$

这两个切向量 $d\boldsymbol{r}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 垂直的条件是 $d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$，即

$$E\,du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v=0. \tag{3.8}$$

特别，当 C 和 C^* 分别是 u 曲线和 v 曲线时，方向数可取成

$$C:\quad du=1,\quad dv=0;$$

$$C^*:\quad \delta u=0,\quad \delta v=1.$$

将上述方向数代入(3.7)，便有两条坐标曲线的交角公式

$$\cos\theta=\frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{3.9}$$

由此导出

命题 曲面的坐标网为正交的充要条件是 $F=0$.

在此顺便指出正交轨线的存在性作为命题的一个应用.

一般地，曲面上的曲线是用参数方程 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 表示的，但也可表示成 $u=\varphi(v)$ 或 $v=\psi(u)$ 或 $f(u, v)=0$.

有时，我们用常微分方程

$$a(u, v)du+b(u, v)dv=0 \tag{3.10}$$

表示曲面上的一族曲线 $\mathfrak{A}$. 这种表示的含意是：方程(3.10)的通解为

$$f(u, v)=C, \tag{3.11}$$

C 是积分常数. 每取定一个 C 值，就对应于曲面上的一条曲线. 因此(3.11)代表曲面上一族曲线，记成 $\mathfrak{A}$.

若曲面上另有一族曲线 $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}^*$ 中每一条曲线与 $\mathfrak{A}$ 中任意一条曲线正交，则称 $\mathfrak{A}^*$ 是曲线族 $\mathfrak{A}$ 的正交轨线族. 从(3.10)得知

$$\frac{dv}{du}=-\frac{a}{b}.$$

把这关系式代入(3.8)中，结果得

$$(Eb-Fa)\delta u+(Fb-Ga)\delta v=0.$$

这就是正交轨线族 $\mathfrak{A}^*$ 的微分方程．因此，正交轨线族一般是唯一存在的．

(3) 面积

设 $\mathscr{D}$ 是曲面 S 的一个区域，下面求 $\mathscr{D}$ 的面积． 区域 $\mathscr{D}$ 表示如下：

$$\mathscr{D}:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),\quad (u,\ v)\in D.$$

首先，我们用坐标曲线将 $\mathscr{D}$ 剖分成许多小块曲边四边形．设 $\Delta\mathscr{D}$ 是其中任意一块，它的四个角点为

$$\boldsymbol{r}(u,\ v),\ \boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v),\ \boldsymbol{r}(u,\ v+\Delta v),\ \boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v+\Delta v).$$

将连接相邻两个角点的向量函数展开为 Δu 或 Δv 的幂级数：

$$\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v)-\boldsymbol{r}(u,\ v)=\boldsymbol{r}_u\Delta u+\cdots,$$

$$\boldsymbol{r}(u,\ v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,\ v)=\boldsymbol{r}_v\Delta v+\cdots,$$

省略部分是关于 Δu 和 Δv 的一阶以上的小量．设以向量 $\boldsymbol{r}_u\Delta u$ 和 $\boldsymbol{r}_v\Delta v$ 为两邻边的平行四边形的面积是 ΔA，那末，它逼近 $\Delta\mathscr{D}$ 的面积(图 2-29)．从

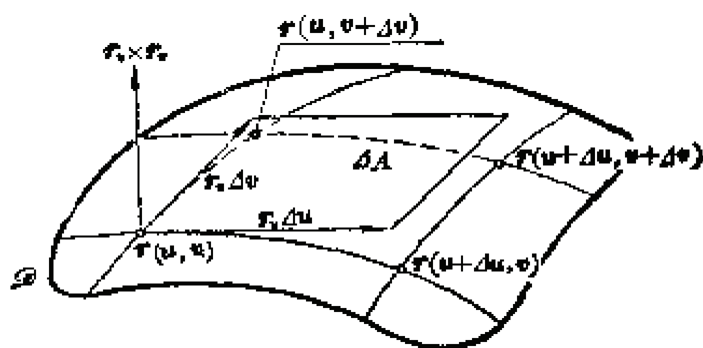


图 2-29

$$\Delta A=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\Delta u\,\Delta v$$

容易导致曲面 S 在区域 $\mathscr{D}$ 中的面积元素

$$dA=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

于是，区域 $\mathscr{D}$ 的面积是

$$A=\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{3.12}$$

如果在曲面 S 上选取了两种坐标网 (u, v) 和 $(\bar{u}, \bar{v})$，它们之间的变换关系式是

$$\begin{cases} u=u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v=v(\bar{u}, \bar{v}). \end{cases}$$

设 S 在 (u, v) 和 $(\bar{u}, \bar{v})$ 两种坐标网下的第一基本量分别为 E、F、G 和 $\bar{E}$、$\bar{F}$、$\bar{G}$，利用

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{\bar{u}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \boldsymbol{r}_{\bar{v}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{cases}$$

可以获得下列变换式：

$$\begin{cases} \bar{E}=\boldsymbol{r}_{\bar{u}}\cdot\boldsymbol{r}_{\bar{u}}=E\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}+F\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}+\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right) \\ \qquad +G\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \bar{F}=\boldsymbol{r}_{\bar{u}}\cdot\boldsymbol{r}_{\bar{v}}=E\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}+F\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}+\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) \\ \qquad +G\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}} \\ \bar{G}=\boldsymbol{r}_{\bar{v}}\cdot\boldsymbol{r}_{\bar{v}}=E\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}+F\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}+\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) \\ \qquad +G\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}. \end{cases} \tag{3.13}$$

从此可见，面积元素的变换关系式为：

$$\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\,d\bar{u}\,d\bar{v}=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

习 题 五

1. 求下列各曲面的第一基本形式:

(1) 圆柱面

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ v\};$$

(2) 圆锥面

$$\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ cv\};$$

(3) 螺旋面

$$\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)+bu\};$$

(4) 悬链面

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\operatorname{ch}\frac{v}{a}\cos u,\ a\operatorname{ch}\frac{v}{a}\sin u,\ v\right\};$$

(5) 伪球面

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\sin v\cos u,\ a\sin v\sin u,\ -a\left(\cos v+\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right)\right\};$$

(6) 旋转椭圆面

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ c\sin\varphi\};$$

(7) 单叶双曲面

$$\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}u\cos v,\ a\operatorname{ch}u\sin v,\ c\operatorname{sh}u\};$$

(8) 双叶双曲面

$$\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}u,\ b\operatorname{sh}u\cos v,\ b\operatorname{sh}u\sin v\};$$

(9) 椭圆抛物面

$$\boldsymbol{r}=\left\{u,\ v,\ \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right\};$$

(10) 双曲抛物面

$$\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\};$$

(11) 劈锥曲面

$$\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ \varphi(u)\};$$

(12) $z=f(x,\ y)$;

(13) 柱面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l}$ 为单位常向量);

(14) 锥面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{l}(u)$ ($\boldsymbol{l}(u)$ 为单位向量函数);

(15) 切线面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{a}'(u)$ (u 为脊线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$ 的弧长参数);

(16) 球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi\}$;

(17) 正螺面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ bu\}$;

(18) 旋转面 $\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}$;

(19) 环面 $\boldsymbol{r}=\{(a+r\cos v)\cos u,\ (a+r\cos v)\sin u,\ r\sin v\}$.

2. 已知曲面 S 的第一基本形式为

$$ds^2=du^2+\operatorname{sh}^2 u\,dv^2,$$

求 S 上的曲线 C: $u=t,\ v=t\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$的弧长.

3. 已知曲面 S 的第一基本形式为

$$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2,$$

求 S 上的两条曲线 C_1: $u+v=0$ 和 C_2: $u-v=0$ 在点(0, 0)的交角.

4. 当曲面的方程为 $z=f(x,\ y)$时,求其面积公式.

5. 求环面

$$\boldsymbol{r}=\{(a+r\cos v)\cos u,\ (a+r\cos v)\sin u,\ r\sin v\}$$

$(0<u,\ v<2\pi)$的总面积.

3.3 第二基本形式

为了研究曲面在空间的情况,这里有必要引进另一个微分形式.

设曲面 S 在点 $P(u,\ v)$ 的切平面为 T_P, 单位法向量为 $\boldsymbol{n}(u,v)$. 我们计算 P 的一个邻近点 $Q(u+\Delta u,\ v+\Delta v)$ 到 T_P 有向的垂直距离 δ (图 2-30).

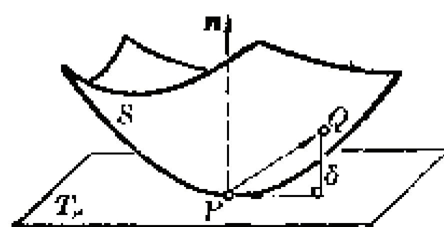


图 2-30

按照泰勒公式展开,得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,\ v)\\&=\boldsymbol{r}_u\Delta u+\boldsymbol{r}_v\Delta v\\&\quad+\frac{1}{2}[\boldsymbol{r}_{uu}(\Delta u)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\Delta u\Delta v+\boldsymbol{r}_{vv}(\Delta v)^2]+\cdots,\end{aligned}$$

式中已略去关于 Δu 和 Δv 的二阶以上小量的部分，于是

$$\delta = \overrightarrow{PQ}\cdot \boldsymbol{n}$$

$$= \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}_{uu}\cdot \boldsymbol{n}(\Delta u)^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\cdot \boldsymbol{n}\Delta u\Delta v + \boldsymbol{r}_{vv}\cdot \boldsymbol{n}(\Delta v)^2] + \cdots$$

或者写成

$$2\delta = L(\Delta u)^2 + 2M\,\Delta u\,\Delta v + N(\Delta v)^2 + \cdots, \qquad (3.14)$$

将式中的 L、M、N 分别记为：

$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\cdot \boldsymbol{n}, \quad M = \boldsymbol{r}_{uv}\cdot \boldsymbol{n}, \quad N = \boldsymbol{r}_{vv}\cdot \boldsymbol{n}. \qquad (3.15)$$

有向垂直距离 δ 的符号反映了曲面在 P 点邻近的弯曲方向：若 $\delta>0$，点 Q 就落在切平面 T_P 的顺着法向量 $\boldsymbol{n}$ 的一侧；若 $\delta<0$，则落在另一侧。δ 的绝对值则反映曲面在 P 点邻近的弯曲程度。应当注意：对于一个固定点 $P(u, v)$，δ 依赖于方向数 $(\Delta u, \Delta v)$。

当 Δu、$\Delta v\to 0$，也就是当点 Q 趋近于点 P 时，我们称 2δ 的主要部分即下列二次微分形式为曲面的**第二基本形式**：

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

L、M、N 称为曲面的**第二基本量**。

利用单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的表示式(1.6)来表达第二基本量，从(3.15)和(3.3)可得到

$$L = \frac{(\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{r}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}},\ M = \frac{(\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{r}_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}},\ N = \frac{(\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{r}_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}. \qquad (3.16)$$

第二基本量还可以表成

$$L = -\boldsymbol{r}_u\cdot \boldsymbol{n}_u, \quad M = -\boldsymbol{r}_u\cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{r}_v\cdot \boldsymbol{n}_u, \quad N = -\boldsymbol{r}_v\cdot \boldsymbol{n}_v. \qquad (3.17)$$

这样一来，第二基本形式

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

$$= -(\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)\cdot(\boldsymbol{n}_u du + \boldsymbol{n}_v dv) = -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}. \qquad (3.18)$$

事实上，我们只要对关系式 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}=0$ 和 $\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}=0$ 的两边关于 u、v 分别求导：

$$\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\qquad \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=0,$$

$$\boldsymbol{r}_{vu}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\qquad \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v=0,$$

便得到(3.17)式.

【例 1】 求旋转面

$$\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}$$

的第二基本形式.

解：从

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{-f\cos u,\ -f\sin u,\ 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\{-f'\sin u,\ f'\cos u,\ 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\{f''\cos u,\ f''\sin u,\ g''\},$$

和单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}\{g'\cos u,\ g'\sin u,\ -f'\},$$

容易得到

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{-fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}},$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

$$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{f'^2+g'^2}},$$

式中，$f'=\dfrac{df}{dv}$，$f''=\dfrac{d^2f}{dv^2}$，等等.

【例 2】 求直纹面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)$$

的第二基本形式.

解：从

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\ddot{\boldsymbol{a}}+v\ddot{\boldsymbol{l}},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\dot{\boldsymbol{l}},$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=0,$$

和单位法向量

$$n=\frac{(\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}}{|(\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}|}$$

得到

$$L=\frac{(\ddot{\boldsymbol{a}}+v\ddot{\boldsymbol{l}},\ \dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}},\ \boldsymbol{l})}{|(\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}|},$$

$$M=\frac{(\dot{\boldsymbol{l}},\ \dot{\boldsymbol{a}},\ \boldsymbol{l})}{|(\dot{\boldsymbol{a}}+v\dot{\boldsymbol{l}})\times\boldsymbol{l}|},$$

$$N=0.$$

习 题 六

求下列各曲面的第二基本形式：

(1) 圆柱面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ v\}$;

(2) 球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi\}$;

(3) 正螺面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ bu\}$;

(4) 悬链面 $\boldsymbol{r}=\left\{a\operatorname{ch}\frac{v}{a}\cos u,\ a\operatorname{ch}\frac{v}{a}\sin u,\ v\right\}$;

(5) 环面 $\boldsymbol{r}=\{(a+r\cos v)\cos u,\ (a+r\cos v)\sin u,\ r\sin v\}$;

(6) 双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\}$;

(7) $z=f(x,\ y)$.

3.4 小结

曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$ 的第一基本形式和第二基本形式是最重要的两个微分形式.

第一基本形式

$$\mathrm{I}=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

式中 $E=\boldsymbol{r}_u^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2,$

表示三个第一基本量.

它的几何意义是曲面上一条曲线的弧长微分的平方 ds^2. 用第一基本量可表示曲面上曲线的弧长、两条曲线间的夹角及曲面面积.

第二基本形式

$$\mathrm{II}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2,$$

式中 $L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n},$

表示三个第二基本量.

第二基本形式表示曲面在空间的局部情况，包括它在其一点附近弯曲的方向和大小. 其详细情况在下一节叙述.

第四节 曲面的法曲率

拖拉机牵引犁在田地里开动，翻起的土块似阵阵的波浪. 牵引阻力的大小及碎土和覆盖性能的好坏，都决定于犁面的形状. 农具设计中的一个重要问题就是如何选好犁面形状. 为了研究犁面形状同阻力和性能之间的关系，人们有必要考察微小土粒沿着犁面运动的轨迹C(图 2-31)及微粒运动的动力学性质. 微粒的单位速度向量，就是曲线C的单位切向量$\boldsymbol{T}$. 微粒的加速度向量，取决于曲线C的曲率向量$k\boldsymbol{N}$(见第一章 3.3 段的例 4). 如果C是一条空间曲线，问题在上一章已经解决了. 现在的情况不同，曲线C被限制在曲面上. 因此，C的曲率向量无疑要依赖于曲面的第一和第二基本形式.

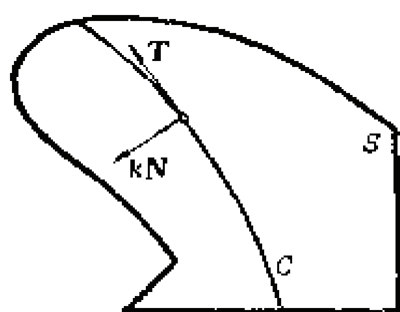


图 2-31

在本节，我们将利用第一和第二基本形式来描述曲面曲线的曲率向量等几何量. 反过来，借助于曲面曲线的曲率性质，引进曲面的法曲率概念，进而研究曲面自身的几何性质.

4.1 法曲率

设曲面 S 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v),$$

而且过点 $P(u, v)$ 的曲面曲线的参数方程为

$$C: \ u=u(s), \quad v=v(s),$$

式中 s 表示 C 的弧长．那末 C 的向量方程是

$$C: \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s), v(s)).$$

设 S 在 P 点的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，切平面为 T_P；C 在 P 点的曲率为 k，单位切向量和主法向量分别为 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$．因为 C 在 P 点的曲率向量

$$k\boldsymbol{N}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \tag{4.1}$$

和 $\boldsymbol{n}$ 都和 $\boldsymbol{T}$ 垂直，所以我们可把前者沿着曲面的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 和切平面 T_P 上 $\boldsymbol{T}$ 的垂直方向分解成两部分：

$$k\boldsymbol{N}=\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\tau}, \tag{4.2}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 平行于 $\boldsymbol{n}$，而且 $\boldsymbol{\tau}$ 在 T_P 上并垂直于 $\boldsymbol{T}$．$\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别称为曲线 C 在 P 点的法曲率向量和测地曲率向量（图 2-32）．

由于

$$\boldsymbol{\nu} /\!/ \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\tau} /\!/ (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}),$$

便有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nu}=k_n\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\tau}=k_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}), \end{cases} \tag{4.3}$$

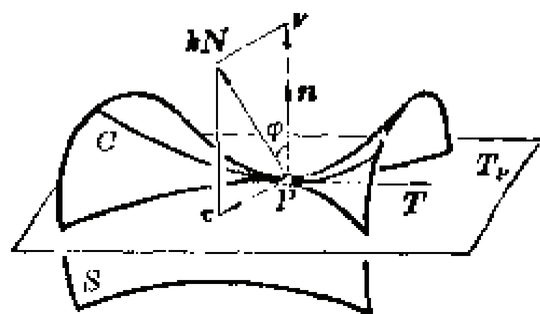


图 2-32

k_n 和 k_g 称为曲线 C 在 P 点的法曲率和测地曲率，它们分别表示向量 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的有向长度．

设 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 φ，从图 2-32 可看出下面的关系式：

$$k_n = k\cos\varphi, \tag{4.4}$$

$$k_g = k\sin\varphi, \tag{4.5}$$

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2. \tag{4.6}$$

我们在本节只讨论法曲率，而把测地曲率的讨论放在第六节中.

为了计算法曲率 k_n 的表示式，从而阐明它的几何意义，我们在(4.3)的第一式两边点乘 $\boldsymbol{n}$，并联系(4.2)和(4.1)，便有

$$k_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = (k\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{n} = k\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{n}.$$

由于曲面曲线 C 的切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 和曲面的法向量垂直，所以

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\boldsymbol{n} = 0.$$

将上式的两边对 s 求导，并利用(3.18)式，得

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}}{ds^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}},$$

式中，I 和 II 如前分别表示第一和第二基本形式.

这样，得出

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}, \tag{4.7}$$

即

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{4.8}$$

(4.8)表明了曲面在 P 点的法曲率除了曲面在点 $P(u,v)$ 的第一、第二基本量 E、F、G 和 L、M、N 外，仅仅依赖于曲线 C 在 P 点的切向量 $d\boldsymbol{r}$ 的方向 $du:dv$.

两条相切于 P 点的曲面曲线 C_1 和 C_2 有同一切方向

$d\boldsymbol{r}$，所以 C_1 和 C_2 在 P 点的法曲率相等．因此，今后称 k_n 为曲面在 P 点沿切方向 $d\boldsymbol{r}$ 的法曲率．

在 P 点，曲面 S 的切线 $d\boldsymbol{r}$ 和法向量 $\boldsymbol{n}$ 决定曲面的法平面 Π．Π 与 S 的截线 C 称为 S 在 P 点沿这切线 $d\boldsymbol{r}$ 的法截线（图 2-33）．因为 C 在 P 点的曲率向量平行于 $\boldsymbol{n}$，它的曲率等于相应法曲率．于是得到法曲率的几何意义：

性质　曲面在一点沿一条切线的法曲率等于沿同一切线的法截线的曲率．

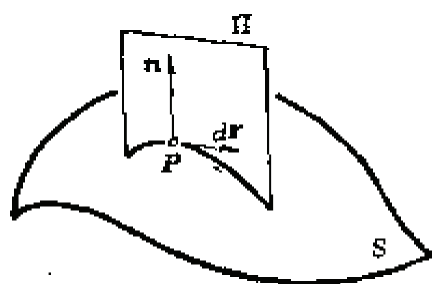


图　2-33

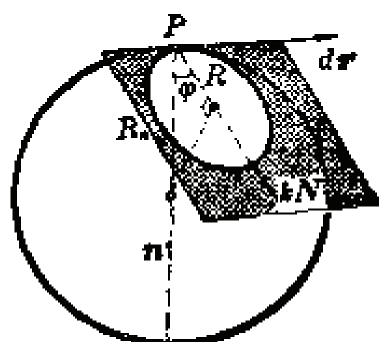


图　2-34

在 P 点，过固定的切线 $d\boldsymbol{r}$ 作平面与曲面相交，设其交线在 P 点的密切圆的半径为 R，曲率向量 $k\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 交于 φ 角．记沿 $d\boldsymbol{r}$ 的法截线的曲率半径为 R_n，从而法曲率和交线的曲率分别为

$$k_n=\frac{1}{R_n},\quad k=\frac{1}{R},$$

于是(4.4)式成为(图 2-34)

$$R=R_n\cos\varphi.$$

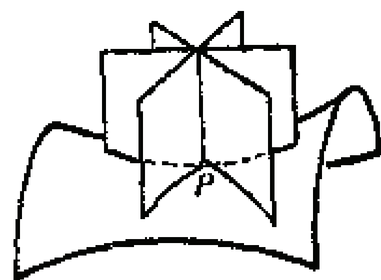


图　2-35

上式的几何表述就是

梅尼埃(Meusnier)定理　在曲面上的一点 P 引一定切线 $d\boldsymbol{r}$，凡过 $d\boldsymbol{r}$ 的平面与曲面的交线，在点 P 的密切圆轨迹为一球面．

我们固定 P 点而变动切线方向 $d\boldsymbol{r}$ 时，检查对应的一族

法截线的弯曲变化情况，即检查法曲率 k_n 随 $d\boldsymbol{r}$ 的变化，便可了解曲面在 P 点的弯曲情况(图 2-35)．这就是下一段讨论的内容．

4.2 主曲率和主方向

(1) 魏因伽吞变换 W　曲面 S 在 P 点的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{n}=0,$$

这就是说，$d\boldsymbol{n}\in T_P$，即 $\boldsymbol{n}_u$、$\boldsymbol{n}_v\in T_P$．

定义　设切平面 T_P 上的线性变换 W 是这样一个对切向量的线性变换，使得

$$W(\boldsymbol{r}_u)=-\boldsymbol{n}_u,\quad W(\boldsymbol{r}_v)=-\boldsymbol{n}_v. \tag{4.9}$$

则称 W 为魏因伽吞(Weingarten)变换，简称 W 变换．

由于 T_P 上的向量

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv,\quad d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv,$$

我们得出一个和(4.9)等价的方程组

$$W(d\boldsymbol{r})=-d\boldsymbol{n}. \tag{4.10}$$

所以，第二基本形式可以按照 W 变换被写成

$$\mathrm{II}=d\boldsymbol{r}\cdot W(d\boldsymbol{r}). \tag{4.11}$$

于是(4.7)式可写成

$$k_n=\frac{d\boldsymbol{r}\cdot W(d\boldsymbol{r})}{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}. \tag{4.12}$$

根据(4.9)式，(3.17)的第二式又可改写为下列形式：

$$\boldsymbol{r}_u\cdot W(\boldsymbol{r}_v)=W(\boldsymbol{r}_u)\cdot\boldsymbol{r}_v.$$

因为 W 是线性变换，所以对于 T_P 上任意二向量 $d\boldsymbol{r}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 必须有关系

$$d\boldsymbol{r}\cdot W(\delta\boldsymbol{r})=W(d\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

成立．根据线性代数的结果，上式表明 W 是 T_P 上关于向量内积的对称变换，而且对称变换 W 必有两个实特征值 k_1、k_2，并可选取对应的特征向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 为单位正交向量(参见本丛书《高等代数》p.485)，即：

$$\begin{cases} W(\boldsymbol{e}_1)=k_1\boldsymbol{e}_1 \\ W(\boldsymbol{e}_2)=k_2\boldsymbol{e}_2, \end{cases} \quad (4.13)$$

式中，　$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=1$，　$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$．

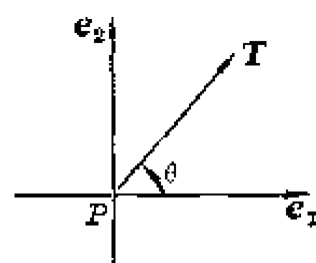


图　2-36

(2) 欧拉公式　当我们选取特征向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 作为 T_P 的基时，T_P 上的任一向量 $\boldsymbol{T}$ 便可表成下列形式(图 2-36)：

$$\boldsymbol{T}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2,$$

其中 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$ 是从 $\boldsymbol{e}_1$ 到 $\boldsymbol{T}$ 的夹角．

经过 W 变换，$\boldsymbol{T}$ 成为

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{T})&=\cos\theta\cdot W(\boldsymbol{e}_1)+\sin\theta\cdot W(\boldsymbol{e}_2)\\ &=k_1\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_1+k_2\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

可是按照法曲率公式(4.12)，

$$\begin{aligned} k_n&=\frac{\boldsymbol{T}\cdot W(\boldsymbol{T})}{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}}\\ &=(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\cdot(k_1\cos\theta\boldsymbol{e}_1+k_2\sin\theta\boldsymbol{e}_2), \end{aligned}$$

即

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta\quad(0\leqslant\theta<\pi). \qquad (4.14)$$

这就是关于法曲率的欧拉(Euler)公式．

在欧拉公式中，特别取 $\theta=0$ 和 $\frac{\pi}{2}$，对应的法曲率为 k_1 和 k_2．从图 2-36 得知，对应的切向量是 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$．这就是说，k_1 和 k_2 分别是对应于特征方向 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的法曲率．

(3) 主曲率和主方向　在固定点 P，法曲率 k_n 是切线方向的函数．这在欧拉公式中被表为 θ 的函数形式．下面讨论

k_n 在什么方向上达到极值.

首先,当 $k_1 \neq k_2$ 时,不妨假定 $k_2 > k_1$. 将(4.14)改写成

$$k_n = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\theta \quad (0 \leqslant \theta < \pi).$$

由此可见,当 $\theta = 0$ 时, k_n 取最小值 k_1; 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, k_n 取最大值 k_2. 这样,便得到

定理 对应于 W 变换的二特征方向的法曲率分别取最小值和最大值.

特征方向 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 称为**主方向**,对应的法曲率 k_1 和 k_2 称为**主曲率**.

在 P 点,如果 $k_1 = k_2$, 则由欧拉公式可知,任何方向的法曲率都相等. 这时, P 点称为曲面的**脐点**. 在脐点,主方向变为不定. 从几何角度看,曲面在脐点是各向均匀弯曲的.

若一个曲面的每个点都是脐点,则称为**全脐点曲面**. 在后面第八节中要证明:全脐点曲面必为球面或平面.

在脐点,对于任意方向数 $du:dv$ 的法曲率 k_n 等于常数 ρ. 从(4.8)式得出

$$(L-\rho E)du^2 + 2(M-\rho F)du\,dv + (N-\rho G)dv^2 \equiv 0.$$

所以

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}. \tag{4.15}$$

4.3 高斯曲率和平均曲率

(1) 主曲率 按照定义,主曲率 k_1、k_2 是 W 变换的两个特征值. 现在我们来求 k_1 和 k_2, 也就是求特征方程

$$W(\boldsymbol{e}) = \lambda \boldsymbol{e} \tag{4.16}$$

的特征值. 可是 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$,

$$W(\boldsymbol{e}) = W(\boldsymbol{r}_u)du + W(\boldsymbol{r}_v)dv = -\boldsymbol{n}_u du - \boldsymbol{n}_v dv,$$

所以(4.16)变为

$$-\boldsymbol{n}_u du-\boldsymbol{n}_v dv=\lambda(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv).$$

在上式两边分别点乘向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$，则得到一组与(4.16)等价的数量方程

$$\begin{cases}(L\,du+M\,dv)-\lambda(E\,du+F\,dv)=0\\(M\,du+N\,dv)-\lambda(F\,du+G\,dv)=0\end{cases}\tag{4.17}$$

或者写成

$$\begin{cases}(L-\lambda E)du+(M-\lambda F)dv=0\\(M-\lambda F)du+(N-\lambda G)dv=0.\end{cases}\tag{4.18}$$

因此，
$$\begin{vmatrix}L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{vmatrix}=0,$$

即

$$(EG-F^2)\lambda^2-(LG-2MF+NE)\lambda+(LN-M^2)=0.\tag{4.19}$$

它的两个根 k_1、k_2 就是 W 变换的两个特征值，即主曲率。

定义 设曲面的主曲率为 k_1、k_2，

$$K=k_1k_2,\tag{4.20}$$

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)\tag{4.21}$$

分别称为高斯(Gauss)曲率和平均曲率。

从二次方程的根与系数的关系可导出

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},\tag{4.22}$$

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}.\tag{4.23}$$

这样，主曲率方程(4.19)可以表成便于记忆的式子：

$$\lambda^2-2H\lambda+K=0.\tag{4.24}$$

如果在整个曲面 S 上 $K=$常数，则称 S 为常曲率曲面。

特别是，当 S 是可展曲面时，$K=0$. $H=0$ 的曲面称为极小曲面. 这些都是特殊曲面. 在后面第八节中要对它们作专门讨论.

(2) 曲面在其一点邻近的结构　我们在 3.4 段已经讨论了曲面在 P 点的邻近点 Q 到切平面 T_P 的有向垂直距离 δ，而且从此导出了第二基本形式. 下面按照高斯曲率 K 的符号来研究曲面在其一点邻近的结构.

(i) $K>0$　这时，P 点称为椭圆点，主曲率 k_1 与 k_2 同符号，比方说，$k_2\geqslant k_1>0$. 因为 k_1、k_2 是法曲率 k_n 的极值，所以 $k_1\leqslant k_n\leqslant k_2$，便有 $k_n>0$，从而 $\delta>0$. 这表明了曲面在 P 点邻近朝 $\boldsymbol{n}$ 的正方向弯曲. P 点的邻近曲面块是凸的(图 2-37). 相反，当 $k_2\leqslant k_1<0$ 时，弯曲的方向也相反，但这曲面块还是凸的.

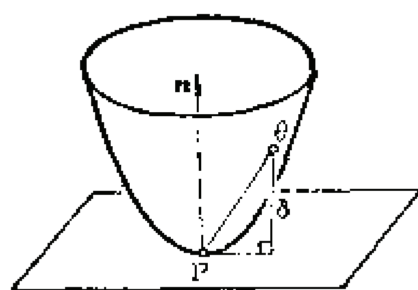


图 2-37

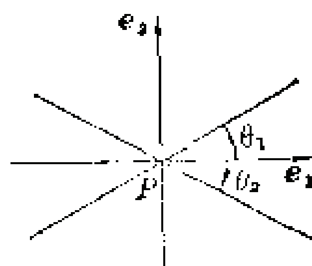


图 2-38

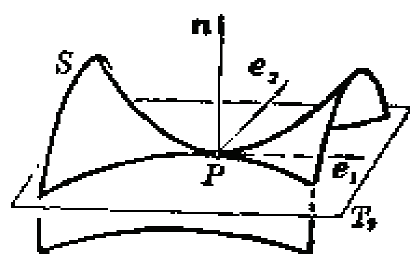


图 2-39

(ii) $K<0$　这时，P 点称为双曲点，主曲率 k_1 与 k_2 正负相反，比方说，假定 $k_1>0$，则 $k_2<0$. 当切线方向变动时，法曲率 k_n 从 k_1 连续变化到 k_2，k_n 是变号的. 从欧拉公式算出 $k_n=0$ 所对应的切线方向为

$$\theta=\pm\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}.$$

法曲率为零的方向叫做渐近方向. 图 2-38 画出了切平面上的主方向 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 以及对应于

$$\theta_1 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}} \quad 和 \quad \theta_2 = -\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}$$

的两条渐近方向，它们把切平面分成四个区域：在两个区域中，$k_n > 0$，$\delta > 0$；在其余区域中，$k_n < 0$，$\delta < 0$。

由此，我们就能画出曲面 S 在 P 点邻近的图形：曲面沿两个主方向的法截线向着相反方向弯曲，称为鞍面（图 2-39）。

当 $k_1 < 0$，$k_2 > 0$ 时，情况相类似。

(iii) $K = 0$ 这时，P 点称为抛物点，主曲率 k_1 与 k_2 中至少有一个为零，不妨设 $k_1 = 0$，$k_2 \geqslant 0$。

当 $k_2 \neq 0$ 时，除了 $\boldsymbol{e}_1$ 方向外，$k_n > 0$。图 2-40 画出三种曲型的曲面结构，其中 (a) 是抛物柱面；(b) 和 (c) 都是旋转曲面；(b) 的生成曲线是 $z = y^4$，z 轴为旋转轴；(c) 的生成曲线是 $z = -y^6$，旋转轴是 Oyz 平面上的直线 $z = -1$。

图中，只有曲面 (a) 和 (b) 是凸的。

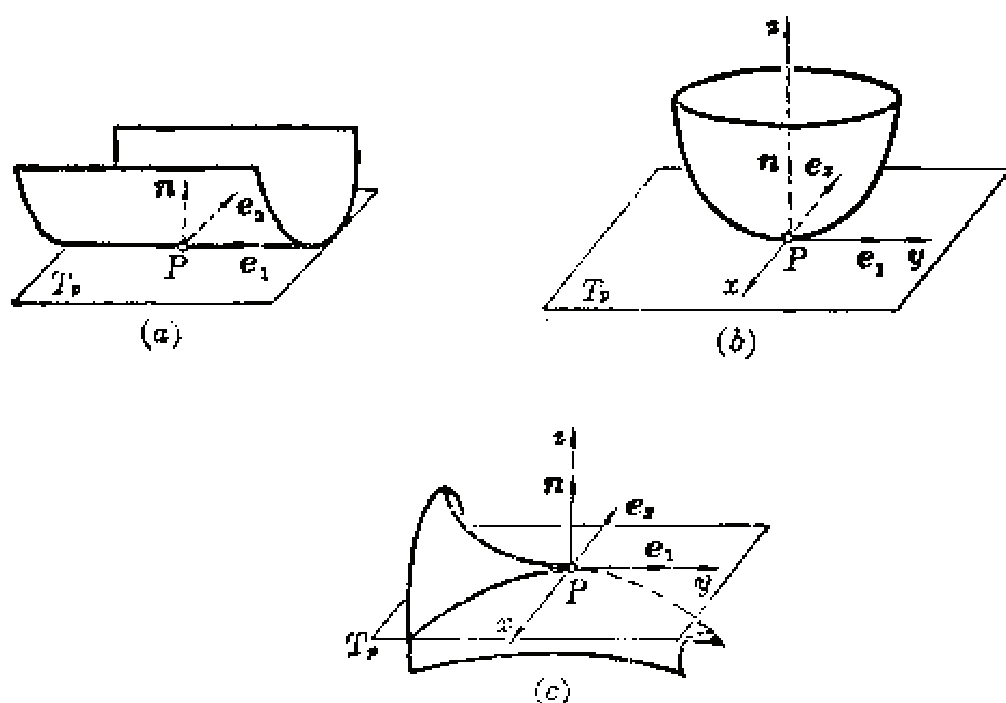


图 2-40

在 P 点，如果 $k_1=k_2=0$，则 P 称为**平点**．这时，曲面在 P 点邻近可能有复杂的结构(见例 3)．

在这里只讨论了曲面上孤立的抛物点．在全部由抛物点组成的曲面上，$K\equiv 0$．在后面 8.3 段我们要证明，这种曲面必定是可展曲面．

综上所述，我们已经按照高斯曲率 K 的符号，把曲面上的点分成椭圆点、双曲点和抛物点三类，并且给出曲面在每一点邻近的结构形态，如下表：

高斯曲率 K	点 P	曲面在 P 点邻近的形状
+	椭圆点	凸曲面
−	双曲点	鞍面
0	抛物点	待定

当对曲面上的点作出分类时，要判别 K 的符号，由于 $EG-F^2>0$，只需判别 $LN-M^2$ 的符号．



图 2-41

在飞机外形设计工作中，飞机机身的极大部分都是凸曲面片．为了保证曲面的凸性，设计师需要算出曲面的高斯曲率 K，并设法使 K 恒为正．假如在部分区域中 $K<0$，就要对这块区域作局部修改，直到达到目的为止．

对于 K 变号的曲面片来说，在 K 的变号区域的交界线上 $K=0$. 就是说，交界线全部由抛物点组成，称为**抛物曲线**. 只要把曲面上的抛物曲线全部标示清楚，曲面上凸的部分和鞍面部分也就被区分开来.

著名数学家克莱因(F. Klein)曾用抛物曲线作过一项有趣的研究. 他把富有高度古典美的阿波罗塑像(图 2-41)作为一张复杂曲面，标出曲面上所有的抛物曲线，试图验证他提出的关于雕塑的艺术美应当满足某种数学关系式的假说. 遗憾的是，那些标出的曲线既没有简单的形状，也没有可以识别的规律性. 尽管如此，克莱因的探索精神和研究方法，仍然是值得人们借鉴的.

4.4 曲率线

在着重介绍曲面的主曲率有关的几何量和几何性质之后，现在转到一些和主方向有关的问题的讨论.

定义 当一条曲面曲线在每点的切线方向是曲面的主方向时，称它为曲面的**曲率线**.

换言之，曲率线是曲面的主方向场的积分曲线.

由于曲面在每点有两个互相垂直的主方向，所以曲面上存在两族互相正交的曲率线.

(1) 曲率线的方程　由定义得知，曲率线的微分方程就是曲面在每点的两个主方向所给定的方程. 另一方面，从方程(4.17)解出主曲率 $\lambda=k_1$、k_2 和两个主方向 $du:dv$. 我们把 $(1, -\lambda)$ 看成齐次线性代数方程组(4.17)的一组非零解，那末方程的系数行列式

$$\begin{vmatrix} L\,du+M\,dv & E\,du+F\,dv \\ M\,du+N\,dv & F\,du+G\,dv \end{vmatrix}=0.$$

展开后，得

$$(LF-ME)du^2+(LG-NE)du\,dv+(MG-NF)dv^2=0. \tag{4.25}$$

这是主方向 $du:dv$ 满足的二次代数方程式．把(4.25)看成微分方程时，它就是曲率线的微分方程．

在实际计算中，常常在(4.25)的两边除以 dv^2(或 du^2)，使成为关于 $\frac{du}{dv}\left(或\ \frac{dv}{du}\right)$的二次代数方程式．求根之后，便得到两个一阶常微分方程．

为了便于记忆，我们把(4.25)写成整齐的下列形式：

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0. \tag{4.26}$$

(2) 曲率线网　在曲面的脐点处(4.15)式成立，第一基本形式和第二基本形式成比例．这时(4.26)变为恒等式，就是任何方向都是主方向．所以全脐点曲面的曲率线是不定的．

反之，在没有脐点的曲面上，(4.26)恰好给出了两族曲率线．当选取它们作为坐标曲线时，

$$F=0,\quad M=0,$$

曲率线网是正交网．

实际上，这时(4.26)可写成

$$du\,dv=0,$$

所以

$$\begin{cases} FN-GM=0 \\ FL-EM=0 \\ EN-GL\neq 0, \end{cases}$$

从此导出 $F=0,\ M=0$.

当取曲率线网为参数曲线网时，u 曲线($du:dv=1:0$)和 v 曲线($du:dv=0:1$)所对应的法曲率分别为主曲率 k_1 和 k_2，所以

$$k_1=\frac{L}{E}, \quad k_2=\frac{N}{G}.$$

以后，我们经常取曲率线网作为参数曲线网，使得第一与第二基本量中一个量消失，从而可简化许多公式。在某些习题的证明过程中，这种取法是非常有效的。

曲率线网在工程技术中也有它的应用。根据 1979 年国外文献报道，在某集装箱货船的设计中，通过数值计算画出船体曲面上的曲率线网，然后根据曲率线网的疏密分布形态，判断并调整船体曲面的光顺性。

(3) 曲率线的几何特征　设曲率线上点 P 处的切线向量为 $d\boldsymbol{r}$，则有

$$W(d\boldsymbol{r})=\lambda d\boldsymbol{r}$$

成立。根据(4.10)式，

$$W(d\boldsymbol{r})=-d\boldsymbol{n},$$

因此得到公式

$$d\boldsymbol{n}=-\lambda d\boldsymbol{r}, \tag{4.27}$$

式中 λ 是主方向 $d\boldsymbol{r}$ 上的主曲率。当点 P 沿曲率线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 运动时，系数 $\lambda=\lambda(s)$。

反之，若(4.27)式成立，倒推回去，便知 $d\boldsymbol{r}$ 是主方向，对应的曲线是曲率线。于是证得：

定理　曲面上曲线 C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为曲率线的充要条件是：存在数量函数 $\lambda(s)$，使得

$$d\boldsymbol{n}=-\lambda(s)d\boldsymbol{r}. \tag{4.28}$$

式中，$\lambda(s)$是曲面在 $\boldsymbol{r}(s)$ 处沿主方向 $d\boldsymbol{r}$ 的主曲率。

(4.28)式称为罗德里克(Rodriques)公式. 实际计算时,常把微分形式表成导数形式:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\lambda(s)\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}.$$

设曲率线做成参数曲线网,而且 u 曲线($dv=0$)和 v 曲线($du=0$)所对应的主曲率分别为 k_1 和 k_2,则罗德里克公式变为如下形式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_u=-k_1\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{n}_v=-k_2\boldsymbol{r}_v.\end{cases}\tag{4.29}$$

4.5 举例

【例 1】 求下列各曲面的高斯曲率 K 和平均曲率 H.

(1) 旋转面 $\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}$

解: 我们已经求得旋转面的第一、第二基本量如下:

$$E=f^2,\quad F=0,\quad G=f'^2+g'^2;$$

$$L=\frac{-fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}},\ M=0,\ N=\frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{f'^2+g'^2}}.$$

于是,

$$\begin{cases}K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{g'(f'g''-f''g')}{f(f'^2+g'^2)^2}\\ H=\dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\dfrac{f(f''g'-f'g'')-g'(f'^2+g'^2)}{2f(f'^2+g'^2)^{3/2}}.\end{cases}\tag{4.30}$$

由于 $F=M=0$, 旋转面的参数曲线网是由曲率线组成的,就是说,旋转面的经线和纬线都是曲率线.

(2) 由方程 $z=f(x,y)$ 表示的曲面

解: 我们引入记号:

$$p=f_x,\quad q=f_y,$$

$$r=f'_{xx},\quad s=f'_{xy},\quad t=f'_{yy},$$

并把原方程写成向量式：

$$\boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ f(x,\ y)\}.$$

如前述，将 x、y 看作 u、v，就得到曲面的第一和第二基本量如下：

$$\begin{cases} E=1+p^2, & F=pq, & G=1+q^2; \\ L=\dfrac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, & M=\dfrac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, & N=\dfrac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{cases} \tag{4.31}$$

于是，

$$\begin{cases} K=\dfrac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \\ H=\dfrac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}}. \end{cases} \tag{4.32}$$

可见，曲面的高斯曲率 K 和 $rt-s^2$ 也即行列式

$$\begin{vmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{xy} & f'_{yy} \end{vmatrix}$$

的正负号一致.

【例 2】 求环面

$$\boldsymbol{r}=\{(a+r\cos v)\cos u,\ (a+r\cos v)\sin u,\ r\sin v\}$$
$$(a>r>0;\ 0\leqslant u,\ v<2\pi)$$

的高斯曲率 K，并讨论环面上的点的分类.

解： $E=(a+r\cos v)^2,\quad F=0,\quad G=r^2;$

$L=(a+r\cos v)\cos v,\quad M=0,\quad N=r.$

高斯曲率

$$K=\frac{\cos v}{r(a+r\cos v)}.$$

(i) 椭圆点 $K>0$，即区域 $0\leqslant v<\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\dfrac{3\pi}{2}<v<2\pi$，

表示环面的外侧面，是凸曲面.

(ii) 双曲点　$K<0$，即区域 $\frac{\pi}{2}<v<\frac{3\pi}{2}$，表示环面的内侧面，曲面呈双曲的鞍形.

(iii) 抛物点　$K=0$，即 $u=\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{3\pi}{2}$，表示环面上最高、最低处的纬线(图 2-42).

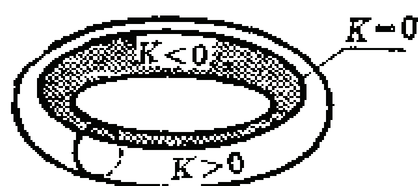


图 2-42

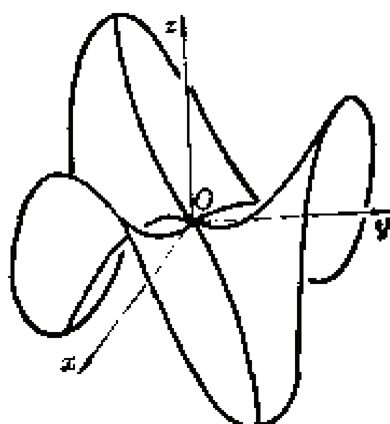


图 2-43

【例 3】 证明"猴鞍面" $z=x^3-3xy^2$ 上的点 (0, 0, 0) 是平点.

【证】 这时

$$p=f_x=3(x^2-y^2),\quad q=f_y=-6xy;$$

$$r=f'_{xx}=6x,\quad s=f'_{xy}=-6y,\quad t=f'_{yy}=-6x.$$

在(4.31)式中，L、M、N 的分子分别是 r、s、t. 当 $x=y=0$ 时，它们全为零. 在原点的主曲率 $k_1=k_2=0$，所以原点是曲面的平点. ∎

我们进而分析曲面在原点处的结构. 曲面在原点的切平面是 Oxy 平面. 作以 z 轴为轴的平面束：$x=\lambda y$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$，并考察平面束中每张平面与曲面的交线，便可画出如图 2-43 所示的曲面形状：这曲面有三峰三谷，两谷安放猴子的双腿，一谷安放猴子的尾巴，故称"猴鞍面".

【例 4】 曲面曲线 C 是曲率线的充要条件为：过 C 的每点引曲面法线，它们所生成的直纹面 Σ 为可展曲面.

【证】 设曲面曲线 C 以其弧长参数表示的方程为

$$C: \ \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(s).$$

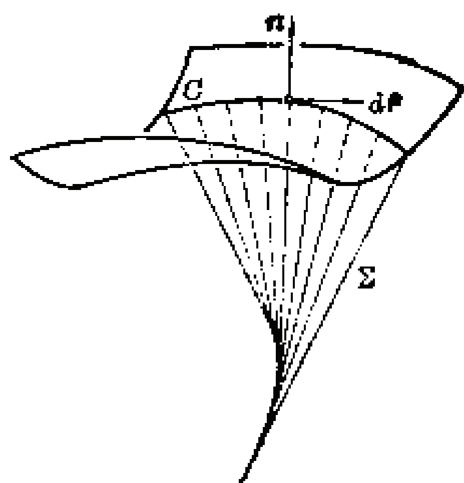


图 2-44

沿曲线 C 所引的曲面法线生成一个直纹面 Σ(图 2-44)，称为**法线曲面**. 它的方程可写为

$$\Sigma: \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}(s)+v\boldsymbol{n}(s),$$

式中 v 表示另一参数.

如果 C 是曲面的曲率线，而且对应于主曲率 $k_1(s)$，那末从罗德里克公式

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-k_1(s)\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}$$

可导出 $\qquad (\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')=(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{n},-k_1\boldsymbol{\rho}')=0.$

因此，Σ 是可展曲面.

反过来，设 Σ 为可展曲面. 从 2.2 段的定理 2，

$$(d\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{n},\ d\boldsymbol{n})=0,$$

即三向量 $d\boldsymbol{\rho}$、$\boldsymbol{n}$、$d\boldsymbol{n}$ 共面. 所以存在不全为零的数量 a、b、c，使得

$$a\,d\boldsymbol{\rho}+b\boldsymbol{n}+c\,d\boldsymbol{n}=0. \tag{4.33}$$

我们注意 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量：$\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{n}=0$；$\boldsymbol{n}$ 又是曲面的法向量：$\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{\rho}=0$. 在 (4.33) 式两边点乘 $\boldsymbol{n}$ 后，得知 $b=0$，于是得

$$a\,d\boldsymbol{\rho}+c\,d\boldsymbol{n}=0.$$

这时 $c\neq 0$，否则，将导致 $d\boldsymbol{\rho}=0$，而与曲线 C 的正则性相矛盾. 由罗德里克公式(4.28)可见，C 是曲面的曲率线. ▌

从此易见：旋转面上的经线和纬线都是曲率线．这是因为：沿经线的法线曲面恰是经线所在的平面，沿纬线的法线曲面恰是一个圆锥面，两者都是可展曲面．

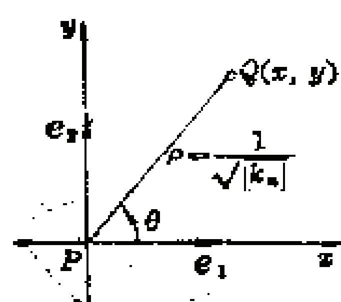
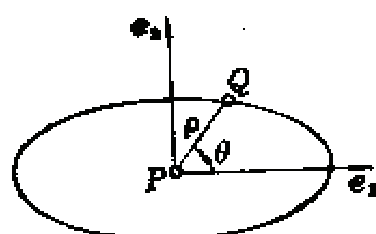


图 2-45

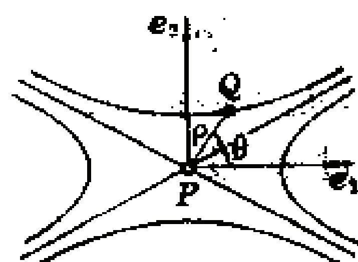
【例 5】 杜班标线

在曲面的切平面 T_P 上，按照欧拉公式能够算出任何方向上的法曲率 k_n．在每条与主方向 e_1 夹角为 θ 的射线（假定对应的 $k_n\neq0$）上，截下长度等于 $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ 的一点 Q，而且使 θ 从 0 变动到 2π．这时，Q 点的轨迹是二次曲线，称为曲面在 P 点的杜班 (Dupin) 标线（图 2-45）．证明如下：

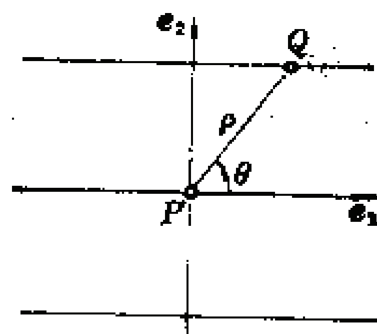
在 T_P 上以 P 为原点，且以单位主方向 e_1、e_2 为基向量，作出平面直角坐标系 $\{P;\ x,\ y\}$．由于 P、Q 间的距离为



(a) $K>0$ P 是椭圆点



(b) $K<0$ P 是双曲点



(c) $K=0$ P 是抛物点

图 2-46

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}=\frac{1}{\sqrt{|k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta|}},$$

Q 点的坐标 $\qquad x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$

满足二次方程

$$k_1x^2+k_2y^2=\pm 1.$$

它代表一条二次曲线，这就是杜班标线的方程.

按照高斯曲率 K 的符号，杜班标线的图形分成如图 2-46 所示的三类.

当切线方向绕 P 点旋转即 θ 变动时，从杜班标线可以直观地看出法曲率 $k_n=\pm\frac{1}{\rho^2}$ 的变化情况.

【例 6】 曲面的主切曲线

在曲面的切平面 T_P 上，凡对应于法曲率 $k_n=0$，即

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0 \tag{4.34}$$

的切线方向 $du:dv$，称为曲面在 P 点的**主切方向**. 现在，按照 P 点的性质分三种情况来讨论：

(i) **椭圆点** 因为在任何方向上 $k_n\neq 0$，这时，实的主切方向不存在.

(ii) **双曲点** 这时存在一对实的主切方向. 在图 2-46 (b) 中，双曲线的主切方向决定于方向角 $\theta=\pm\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}$. 所对应的一对方向就是 P 点的主切方向.

(iii) **抛物点** 当 $k_1=0$，$k_2\neq 0$ 时，e_1 方向是唯一的主切方向.

如果曲面曲线 C 在每一点的切线方向都是主切方向，则 C 称为曲面的**主切曲线**. (4.34)式是它的微分方程.

对于高斯曲率 $K>0$ 的曲面，不存在实的主切曲线；若 $K=0$，一般存在一族实的主切曲线. 若 $K<0$，则存在两族

实的主切曲线．这时，我们取它们为曲面的参数曲线网，于是 $L=N=0$．反之，当 $L=N=0$ 时，曲面的参数曲线网是由两族主切曲线形成的．

特别是，当一条直线在曲面上时，它必是曲面的主切曲线（见习题七第 16 题）．

习　题　七

1．试证明在曲面上的一点，任何两个正交方向的法曲率之和相等．

2．在曲面上的任一定点，把法曲率公式 (4.8) 看成二元函数 $k_n=k_n(du,\ dv)$，试从 k_n 的极值条件 $\dfrac{\partial k_n}{\partial(du)}=\dfrac{\partial k_n}{\partial(dv)}=0$ 导出主曲率和主方向的公式(4.17)．

3．试证明：(1) 平面和球面都是全脐点曲面；(2) 平面的任一点都为平点，球面在任一点的法曲率和方向无关．

4．试证明：在半径为 a 的球面上，高斯曲率与平均曲率都是常数：

$$K=\frac{1}{a^2},\quad H=\frac{1}{a}.$$

5．求螺面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ u+v\}$ 的高斯曲率与平均曲率．

6．试证明：平均曲率 $H=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}k_n\,d\theta$．

7．试证明：正螺面和悬链面的平均曲率 $H=0$．

8．试证明：直纹面上不存在椭圆点，即高斯曲率 $K\leqslant 0$．

9．试证明：可展曲面的高斯曲率 $K=0$．

10．试证明：(1) 椭圆面、双叶双曲面、椭圆抛物面上的点都是椭圆点；

(2) 单叶双曲面和双曲抛物面上的点都是双曲点；

(3) 锥面和柱面上的点都是抛物点．

11．求曲面 $\boldsymbol{r}=\{u^3,\ v^3,\ u+v\}$ 的抛物曲线．

12．在 4.5 段例 1 的(1)中，设在 Oxz 平面上的生成曲线 C：$\boldsymbol{r}=\{f(v),\ g(v)\}$ 的参数 v 是它的弧长，试证明：旋转面的高斯曲率和平均曲率为

$$K=-\frac{f''}{f},\quad H=\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{g'}-\frac{g'}{f}\right).$$

13. 若旋转面的经线上存在一个拐点或一条垂直于对称轴的切线，试证明：这拐点或这切线的切点都是曲面的抛物点。

14. 求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ bu\}$ 上的曲率线。

15. 求出由 $z=f(x,\ y)$ 定义的曲面的曲率线方程。

16. 试证明：曲面上的任何直线必是它的主切曲线。

4.6 小结

本节是曲面论中内容最丰富的一节，公式较多。大体上分成下列五部分：

一、法曲率

(1) 定义　曲面上曲线 C 在点 P 的曲率向量 $k\boldsymbol{N}$ 沿曲面法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的投影称为法曲率，记成 k_n。

(2) 算式

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

(3) 几何意义　在曲面上点 P，对应于切方向 $du:dv$ 的法曲率 k_n 等于在 P 点沿同一方向作的法截线的曲率。

二、主曲率和主方向

(1) 定义　在曲面上任一固定点的法曲率 k_n 只同切线方向有关，它的最小值 k_1 和最大值 k_2 称为主曲率，对应的切线方向 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 称为主方向。

(2) 欧拉公式

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta.$$

(3) W 变换　在曲面的切平面 T_P 上的线性变换 W，使得 $W(d\boldsymbol{r})=-d\boldsymbol{n}$，称为魏因伽吞变换，简称 W 变换。

W 变换的特征值和特征方向就是二主曲率和二主方向。

三、高斯曲率和平均曲率

(1) 定义　主曲率 k_1、k_2 的乘积和平均值称为高斯曲率

和平均曲率：

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

(2) 算式

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}.$$

(3) 以主曲率 k_1、k_2 为根的二次代数方程为：

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

(4) 主方向的方程　在曲面的切平面 T_P 上，满足下述二次代数方程的两组方向数 $du:dv$ 就是曲面在 P 点的主方向：

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{4.35}$$

四、曲率线

(1) 定义　若曲面上曲线 C 在每点的切线方向都是主方向，则称 C 为曲率线。

(2) 微分方程　(4.35)是曲率线满足的常微分方程，其中 E、F、G 和 L、M、N 都是 (u, v) 的函数。

(3) 曲率线网　在一个不含脐点的曲面上，参数曲线网为曲率线网的充要条件是 $F = M = 0$.

(4) 几何特征　曲面上曲线 C：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 成为曲率线的充要条件是：存在数量函数 $\lambda(s)$，使得

$$d\boldsymbol{n} = -\lambda(s)\,d\boldsymbol{r}.$$

$\lambda(s)$ 是曲面在 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的主曲率。上式称为罗德里克公式。

五、曲面上点的分类

(1) 按照高斯曲率 K 的符号，曲面上的点被分成三类：

(i) $K>0$ 的点称为椭圆点，曲面在椭圆点邻近是凸的；

(ii) $K<0$ 的点称为双曲点，曲面在双曲点的邻近是鞍面；

(iii) $K=0$ 的点称为抛物点。

(2) 在曲面上，凡满足条件

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=\rho$$

的点称为脐点。当 $\rho=0$ 时称为平点；$\rho\neq0$ 时称为圆点。在脐点处，主方向不定，对应于任一方向的法曲率都是相同的。

第五节　曲面论的基本定理

在上一章的曲线论中，我们首先在曲线的每一点 $\boldsymbol{r}(s)$ 处建立一个活动标架 $\{\boldsymbol{r}(s);\ \boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)\}$，称为曲线的弗雷耐标架。接着对标架的每一向量求导，并将导向量表示为原标架的三个向量的线性组合，就得到弗雷耐公式，是曲线论的基本公式。最后，对基本公式积分(解一个常微分方程组)，结果得出曲线的表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$。这样，曲线论基本定理就被推导了出来。

在本节，我们将同样处理曲面论的相应问题，为此，在曲面的每一点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 处建立一个活动标架 $\{\boldsymbol{r}(u,v);\ \boldsymbol{r}_u(u,v),\ \boldsymbol{r}_v(u,v),\ \boldsymbol{n}(u,v)\}$。对标架的每一向量求偏导，并把各偏导函数表示为原标架的三个向量的线性组合。这样，我们便有曲面论的基本公式。对这些基本公式积分(解一个偏微分方程组)，就可得到曲面的参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，于是导出曲面论的基本定理。

5.1 记号

为了简化记号，将有关公式表述得更加简洁整齐，下面引入新符号．记

参数：
$$u=u^1,\quad v=u^2.$$

曲面的参数表示：
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\ u^2).$$

一阶和二阶偏导数：
$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_1,\quad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_2,$$
$$\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{r}_{11},\quad \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{r}_{12},\quad \boldsymbol{r}_{vu}=\boldsymbol{r}_{21},\quad \boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{r}_{22},$$
$$\boldsymbol{n}_u=\boldsymbol{n}_1,\quad \boldsymbol{n}_v=\boldsymbol{n}_2.$$

第一和第二基本量：
$$E=g_{11},\quad F=g_{12}=g_{21},\quad G=g_{22},$$
$$L=\Omega_{11},\quad M=\Omega_{12}=\Omega_{21},\quad N=\Omega_{22}.$$

即
$$\begin{cases} g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j \\ \Omega_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{n}_j=-\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{n}_i \end{cases}(i,\ j=1,\ 2).\qquad (5.1)$$

我们将和式记号简记为
$$\sum_i=\sum_{i=1}^{2},\quad \sum_{i,j}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}.$$

要注意，作和过程同指标记号无关，如：
$$\sum_i a_i b^i=\sum_k a_k b^k,\quad \sum_{i,j} a_{ij}b^{ij}=\sum_{k,l} a_{kl}b^{kl}.$$

于是第一和第二基本形式分别变为
$$\mathrm{I}=g_{11}(du^1)^2+2g_{12}du^1du^2+g_{22}(du^2)^2=\sum_{i,j}g_{ij}du^idu^j,$$
$$\mathrm{II}=\Omega_{11}(du^1)^2+2\Omega_{12}du^1du^2+\Omega_{22}(du^2)^2=\sum_{i,j}\Omega_{ij}du^idu^j.$$

I 和 II 还可以看成关于 du^1 和 du^2 的二次形式，其系数

矩阵分别是

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

设一个曲面选取了两种独立的参数偶(u^1, u^2)和$(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$，其中

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \\ u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2) \\ \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2). \end{cases}$$

由于

$$\mathrm{I} = \sum_{i,j} g_{ij}\, du^i\, du^j = \sum_{i,j} g_{ij}\Big(\sum_k \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} d\bar{u}^k\Big)\Big(\sum_l \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l} d\bar{u}^l\Big)$$

$$= \sum_{k,l}\Big(\sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l}\Big) d\bar{u}^k\, d\bar{u}^l = \sum_{k,l} \bar{g}_{kl}\, d\bar{u}^k\, d\bar{u}^l,$$

所以
$$\bar{g}_{kl} = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l} \quad (k, l = 1, 2).$$

或者表成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{bmatrix}.$$

这就是第一基本量在曲面的参数变换下的变换式。这组实质上是和(3.13)式相同，只不过形式上变为更加对称整齐。

类似地，第二基本量的变换式是

$$\bar{\Omega}_{kl} = \sum_{i,j} \Omega_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l} \quad (k, l = 1, 2).$$

这样一套关于$[g_{ij}]$、$[\Omega_{ij}]$的量和其变换式一起称为张量。

现在，记第一基本量的矩阵的逆阵为

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

式中，g 代表第一基本形式的系数行列式：

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}=EG-F^2.$$

矩阵$[g_{jk}]$和它的逆阵相乘，得单位阵：

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

详述之，

$$\sum_j g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k=\begin{cases} 0, & 当\ i\neq k \\ 1, & 当\ i=k \end{cases} \quad (i,\ k=1,\ 2), \qquad (5.3)$$

δ^i_k 称为克隆内克(Kronecker)的 δ(念作代尔他)。

5.2 基本公式

过曲面的各点 $P(u^1,\ u^2)$ 作法向量 $\boldsymbol{n}$ 和切平面 T_P，并取 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 为 T_P 的基向量．在点 P，三个线性独立的向量组合成三维标架(图 2-47)：

$$\{\boldsymbol{r}(u^1,\ u^2);\ \boldsymbol{r}_1(u^1,\ u^2),\ \boldsymbol{r}_2(u^1,\ u^2),\ \boldsymbol{n}(u^1,\ u^2)\}.$$

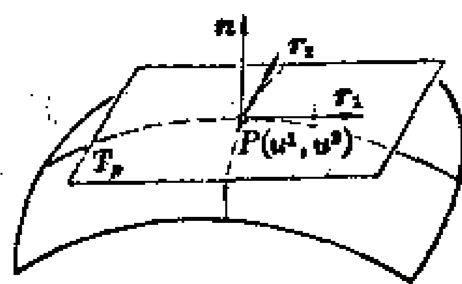


图 2-47

当点 $P(u^1,\ u^2)$ 在曲面上变动时，标架也随之而变.

曲面的标架 $\{\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{n}\}$ 一般不是单位正交标架，它们所满足的关系只有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 和 $|\boldsymbol{n}|=1$，即：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=0 \quad (i=1,\ 2), \qquad (5.4)$$

$$\boldsymbol{n}^2=1. \qquad (5.5)$$

当我们对曲面标架的三个向量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{n}$ 关于 u^1、u^2 分别求偏导时，所得到的五个向量 $\boldsymbol{r}_{11}$、$\boldsymbol{r}_{12}$、$\boldsymbol{r}_{22}$、$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 都可分别被表示为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{n}$ 的线性组合，即：

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\sum_k \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k+b_{ij}\boldsymbol{n} \tag{5.6}$$

$(i、j=1,\ 2)$,

$$\boldsymbol{n}_i=\sum_k \omega_i^k \boldsymbol{r}_k+c_i\boldsymbol{n} \tag{5.7}$$

其中 $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$、$b_{ij}$、$\omega_i^k$ 和 c_i 是待定的系数.

下面用曲面的第一和第二基本量 g_{ij}、Ω_{ij} 以及它们的偏导函数来表示这些待定的系数:

(1) 在(5.6)式两边点乘 $\boldsymbol{n}$, 并注意(5.4)、(5.5)、(5.1), 便得

$$b_{ij}=\Omega_{ij}\quad (i,\ j=1,\ 2). \tag{5.8}$$

(2) 在(5.7)式两边点乘 $\boldsymbol{n}$, 并注意 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_i=0$ $(i=1,\ 2)$, 便有

$$c_i=0\quad (i=1,\ 2). \tag{5.9}$$

(3) 在(5.7)式两边点乘 $\boldsymbol{r}_j(j=1,\ 2)$, 并注意(5.1)式, 则得到

$$\sum_k \omega_i^k g_{kj}=-\Omega_{ij}\quad (i,\ j=1,\ 2). \tag{5.10}$$

在(5.10)式两边乘 g^{jm}, 并对 j 从1到2作和, 且利用(5.3)式, 容易解出

$$\omega_i^m=-\sum_j \Omega_{ij}g^{jm}\quad (i,\ m=1,\ 2). \tag{5.11}$$

上述的作和过程, 其实就是对矩阵求逆的过程:

(5.10)式:

$$\begin{bmatrix}\omega_1^1 & \omega_1^2\\ \omega_2^1 & \omega_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{bmatrix},$$

(5.11)式:

$$\begin{bmatrix}\omega_1^1 & \omega_1^2\\ \omega_2^1 & \omega_2^2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=-\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{bmatrix}.$$

(4) 最后，我们决定系数 Γ_{ij}^k：

在(5.1)第一式的两边对 $u^l(l=1, 2)$ 求导：

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}=\boldsymbol{r}_{il}\cdot\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_{jl}.$$

適当改写指标记号，得关系式

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_l+\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_{lj},$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}=\boldsymbol{r}_{ji}\cdot\boldsymbol{r}_l+\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_{li}.$$

注意到 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ji}$，就得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_l.$$

引入记号

$$[ij,\ l]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right), \qquad (5.12)$$

并在(5.6)式两边点乘 $\boldsymbol{r}_l$，按照上述记号，得到

$$[ij,\ l]=\sum_k\Gamma_{ij}^k g_{kl}.$$

在上式两边乘 g^{ml}，并对 l 从1到2作和，解得

$$\Gamma_{ij}^m=\sum_l g^{ml}[ij,\ l] \quad (m,\ i,\ j=1,\ 2),$$

或者展开成

$$\Gamma_{ij}^m=\frac{1}{2}\sum_l g^{ml}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) \quad (m,\ i,\ j=1,\ 2). \qquad (5.13)$$

按照(5.12)和(5.13)式的表示可以看出，$[ij,\ l]$ 和 Γ_{ij}^m 关于指标 i、j 都是对称的．而且它们仅仅是由第一基本量及其一阶导函数组成的，因而与第二基本形式无关．我们分别称 $[ij,\ l]$ 和 Γ_{ij}^m 为第一类和第二类克里斯朵弗(Christoffel)记号，简称克氏记号．今后經常用到克氏记号 Γ_{ij}^m，也称为曲面

的联络系数。

至此，方程(5.6)和(5.7)中的所有系数全被确定了，而且它们都由曲面的第一和第二基本量 g_{ij} 及 Ω_{ij} 所组成：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij}=\sum\limits_{m}\Gamma_{ij}^{m}\boldsymbol{r}_m+\Omega_{ij}\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}_i=\sum\limits_{k}\omega_i^k\boldsymbol{r}_k \end{cases} \quad (i,\ j=1,\ 2), \tag{5.14}$$

式中 $$\omega_i^k=-\sum_j\Omega_{ij}g^{jk}\quad (i,\ k=1,\ 2).$$

我们称(5.14)的第一式为高斯公式，(5.14)的第二式为魏因伽吞公式，并且总称(5.14)为曲面论的基本公式。

【例】 当曲面的参数曲线网为正交网时，算出 $\Gamma_{ij}^k(i,\ j,\ k=1,\ 2)$。

解：这时，$F=0$。从(5.2)式得知

$$g_{11}=E,\quad g_{12}=g_{21}=0,\quad g_{22}=G;$$

$$g^{11}=\frac{1}{E},\quad g^{12}=g^{21}=0,\quad g^{22}=\frac{1}{G}.$$

由定义算出

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1=\dfrac{1}{2}g^{11}\left(\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}-\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right)=\dfrac{E_1}{2E} \\ \Gamma_{12}^1=\dfrac{1}{2}g^{11}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right)=\dfrac{E_2}{2E} \\ \Gamma_{22}^1=\dfrac{1}{2}g^{11}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}+\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right)=-\dfrac{G_1}{2E} \\ \Gamma_{11}^2=\dfrac{1}{2}g^{22}\left(\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}-\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)=-\dfrac{E_2}{2G} \\ \Gamma_{12}^2=\dfrac{1}{2}g^{22}\left(\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}+\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)=\dfrac{G_1}{2G} \\ \Gamma_{22}^2=\dfrac{1}{2}g^{22}\left(\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}+\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right)=\dfrac{G_2}{2G}, \end{cases} \tag{5.15}$$

式中已置 $E_1=\dfrac{\partial E}{\partial u^1}$，$E_2=\dfrac{\partial E}{\partial u^2}$，等等。于是曲面论的基本

公式(5.14)简化为下列形式：

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{r}_{11}=\dfrac{E_1}{2E}\boldsymbol{r}_1-\dfrac{E_2}{2G}\boldsymbol{r}_2+L\boldsymbol{n}\\[2mm]
\boldsymbol{r}_{12}=\dfrac{E_2}{2E}\boldsymbol{r}_1+\dfrac{G_1}{2G}\boldsymbol{r}_2+M\boldsymbol{n}\\[2mm]
\boldsymbol{r}_{22}=-\dfrac{G_1}{2E}\boldsymbol{r}_1+\dfrac{G_2}{2G}\boldsymbol{r}_2+N\boldsymbol{n}\\[2mm]
\boldsymbol{n}_1=-\dfrac{L}{E}\boldsymbol{r}_1-\dfrac{M}{G}\boldsymbol{r}_2\\[2mm]
\boldsymbol{n}_2=-\dfrac{M}{E}\boldsymbol{r}_1-\dfrac{N}{G}\boldsymbol{r}_2.
\end{cases}
\tag{5.16}
$$

5.3 基本方程

上一段所导出的曲面论的基本公式(5.14)只与曲面的第一和第二基本量$[g_{ij}]$、$[\Omega_{ij}]$有关. 在本段中要继续讨论的是以下三项内容：

(1) 曲面的第一和第二基本量 $[g_{ij}]$ 和 $[\Omega_{ij}]$ 之间存在两组条件：

(i) 代数的条件：$[g_{ij}]$是对称正定矩阵，$[\Omega_{ij}]$是对称矩阵.

(ii) 分析的条件：$[g_{ij}]$、$[\Omega_{ij}]$及其导数之间满足所谓高斯方程和科达齐方程.

(2) 设$[g_{ij}]$和$[\Omega_{ij}]$满足上述条件，则存在曲面 S，使得它的第一和第二基本量分别是$[g_{ij}]$和$[\Omega_{ij}]$.

(3) 除了曲面在空间的位置外，它是唯一的(即：S 的形状是唯一确定的).

其中第(2)、(3)两项描写了曲面的存在性和唯一性，总称*曲面论的基本定理*. 这和曲线论的基本定理相类似. 但在第

(1)项中所述的条件却是曲面论所特有的，我们称它们为曲面论的基本方程．

为了推导这些基本方程，首先记

$$\boldsymbol{r}_{ijk}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ij}}{\partial u^k}, \quad (\Gamma_{ij}^m)_k=\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k}, \quad (\Omega_{ij})_k=\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial u^k},$$

等等．将(5.14)的第一式两边对 u^k 求导，并将(5.14)式代入，便有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{ijk}=&\sum_m\Big[(\Gamma_{ij}^m)_k+\sum_l \Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m-\Omega_{ij}\sum_l \Omega_{kl}g^{lm}\Big]\boldsymbol{r}_m\\&+\Big[\sum_m \Gamma_{ij}^m\Omega_{mk}+(\Omega_{ij})_k\Big]\boldsymbol{n}.\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{ikj}=&\sum_m\Big[(\Gamma_{ik}^m)_j+\sum_l \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m-\Omega_{ik}\sum_l \Omega_{jl}g^{lm}\Big]\boldsymbol{r}_m\\&+\Big[\sum_m \Gamma_{ik}^m\Omega_{mj}+(\Omega_{ik})_j\Big]\boldsymbol{n}.\end{aligned}$$

将上面两式两边分别相减，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{ijk}-\boldsymbol{r}_{ikj}=&\sum_m\Big[(\Gamma_{ij}^m)_k-(\Gamma_{ik}^m)_j+\sum_l(\Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m-\Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m)\\&-\sum_l g^{lm}(\Omega_{ij}\Omega_{kl}-\Omega_{ik}\Omega_{jl})\Big]\boldsymbol{r}_m\\&+\Big[(\Omega_{ij})_k-(\Omega_{ik})_j-\sum_m(\Gamma_{ik}^m\Omega_{mj}-\Gamma_{ij}^m\Omega_{mk})\Big]\boldsymbol{n}\\&(i、j、k=1、2).\end{aligned}\tag{5.17}$$

因为曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ 充分光滑，具备三阶导数连续性，从而

$$\boldsymbol{r}_{ijk}=\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^j\partial u^k}=\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^k\partial u^j}=\boldsymbol{r}_{ikj},$$

于是，(5.17)式的左边等于零．由于向量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{n}$ 的线性独立性，(5.17)式右边各项的系数都为零：

$$
\begin{cases}
\sum_p g^{pm}(\Omega_{ij}\Omega_{kp}-\Omega_{ik}\Omega_{jp}) \\
\qquad =(\Gamma^m_{ij})_k-(\Gamma^m_{ik})_j+\sum_p(\Gamma^p_{ij}\Gamma^m_{pk}-\Gamma^p_{ik}\Gamma^m_{pj}) \\
(\Omega_{ij})_k-(\Omega_{ik})_j=\sum_p(\Gamma^p_{ik}\Omega_{pj}-\Gamma^p_{ij}\Omega_{pk}) \\
\qquad\qquad (i、j、k、m=1、2).
\end{cases}
\tag{5.18}
$$

在第一式两边乘 g_{lm}，对 m 从 1 到 2 作和，并记

$$
R_{hijk}\equiv\sum_m g_{hm}\left[(\Gamma^m_{ik})_j-(\Gamma^m_{ij})_k+\sum_p(\Gamma^p_{ik}\Gamma^m_{pj}-\Gamma^p_{ij}\Gamma^m_{pk})\right]
$$

$$
(h、i、j、k=1、2), \tag{5.19}
$$

我们得到所求的基本方程为

$$
\begin{cases}
R_{hijk}=\Omega_{hj}\Omega_{ik}-\Omega_{ij}\Omega_{hk} \\
(\Omega_{ij})_k-(\Omega_{ik})_j=\sum_p(\Gamma^p_{ik}\Omega_{pj}-\Gamma^p_{ij}\Omega_{pk})
\end{cases}
\quad (h、i、j、k=1、2). \tag{5.20}
$$

特别地，称前者为高斯方程，后者为科达齐(Codazzi)方程.

基本方程中的 R_{hijk} 称为黎曼 (Riemann) 曲率张量. 从定义式 (5.19) 可见，R_{hijk} 只和曲面的第一基本量 $[g_{ij}]$ 及其一、二阶导数有关.

在形式上，高斯方程包括 16 个方程，科达齐方程包括 8 个方程. 但是经过直接计算可知，彼此独立的方程并没有这么多：高斯方程中独立的只有一个，科达齐方程中独立的有两个，它们是

$$
\begin{cases}
R_{1212}=LN-M^2 \\
L_2-M_1=\Gamma^1_{12}L+(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})M-\Gamma^2_{11}N \\
M_2-N_1=\Gamma^1_{22}L+(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})M-\Gamma^2_{12}N.
\end{cases}
\tag{5.21}
$$

第一方程，即高斯方程之所以重要，是由于高斯曲率

$$
K=\frac{R_{1212}}{g} \tag{5.22}
$$

仅仅和第一基本量有关. 这就是

高斯定理 曲面的高斯曲率仅由其第一基本形式确定.

高斯曲率从其定义式(4.22)看，是由曲面的第一和第二基本量确定的. 可是，高斯方程表明了，K 实质上与第二基本量无关. 象 K 这样的量称为曲面的内在几何量，它们在曲面的等距映射下是不变的. 这些将是本章7.1段所讨论的内容，无论在理论上和应用上都具有深刻的意义.

5.4 基本定理

基本定理 给定两组 u^1、u^2 的光滑函数 $[g_{ij}]$ 和 $[\Omega_{ij}]$ $(i, j=1, 2)$，假设 $g_{ij}=g_{ji}$，$\Omega_{ij}=\Omega_{ji}$，$\sum_{i,j} g_{ij}du^i du^j$ 是正定的形式，而且它们满足高斯-柯达齐方程. 那末，一定存在曲面 S，使它的第一和第二基本量分别为 $[g_{ij}]$ 和 $[\Omega_{ij}]$，而且除了 S 在空间的位置外，它是唯一的.

因为定理的证明较长，还涉及一阶线性齐次偏微分方程组解的存在定理，我们在这里只简述定理的证明过程，而略去其计算.

首先，我们添加一组方程 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}=\boldsymbol{r}_i$ $(i=1, 2)$ 到基本公式(5.14)中去，使全体变成一组关于未知函数 $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$ 的一阶线性齐次偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}=\boldsymbol{r}_i \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j}=\sum_m \Gamma_{ij}^m \boldsymbol{r}_m+\Omega_{ij}\boldsymbol{n} \quad (i, j=1, 2), \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i}=-\sum_{k,l} \Omega_{il} g^{lk}\boldsymbol{r}_k \end{cases} \tag{5.23}$$

式中，各系数都是已知函数[参阅(5.2)和(5.13)].

假定方程组(5.23)有解 $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$. 那末，这些解必

须满足可积条件，就是各函数的二阶偏导函数可以交换求导次序：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u^j}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\right)=\dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}\right) & (i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2)\\ \dfrac{\partial}{\partial u^k}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j}\right)=\dfrac{\partial}{\partial u^j}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^k}\right) & (j\neq k;\ i,\ j,\ k=1,\ 2)\\ \dfrac{\partial}{\partial u^j}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i}\right)=\dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^j}\right) & (i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2).\end{cases} \tag{5.24}$$

把(5.23)的右端代入上列三组方程，我们得到关于 Γ_{ij}^m、Ω_{ij}、g^{jk} 的若干条件．其中由于 Γ_{ij}^m 和 Ω_{ij} 关于 i、j 是对称的，第一组方程变为恒等式．由上一段的推导易见，第二组方程就是高斯-科达齐方程．经过一番计算可知，第三组方程是高斯-科达齐方程的推论．因此，(5.24)与高斯-科达齐方程等价．

按照一阶线性偏微分方程的理论，(5.24)是偏微分方程组(5.23)的可积条件．当这组方程满足可积条件时，它的解必定存在．如果添加初始条件，对应的解便是唯一的．

这样，从(5.23)解出的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\ u^2)$ 便表示所求的曲面．

曲面论的基本定理和曲线论的基本定理非常相似，所不同之处仅在于：曲面论的基本公式是由双变数的偏微分方程组成的，所以这里就有可积条件，即曲面论的基本方程；而在曲线论中却不存在类似的方程．

当曲面 S 的参数曲线构成正交网时，高斯方程和科达齐方程采取较简单的形式：

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\} \tag{5.25}$$

和

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v-\left(\dfrac{M}{\sqrt{E}}\right)_u-N\dfrac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0\\[2ex]
\left(\dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\dfrac{M}{\sqrt{G}}\right)_v-L\dfrac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\dfrac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0.
\end{cases}
\tag{5.26}
$$

实际上，把(5.15)式所表示的 Γ_{ij}^k 代入(5.21)，便可获得上述公式．具体计算留给读者作为习题．

作为一个例子，我们考察这样一个曲面，它的第一基本形式为

$$
\mathrm{I}=\rho^2(du^2+dv^2),
$$

式中，函数 $\rho=\rho(u,\ v)$．这时，高斯曲率是

$$
K=-\frac{1}{\rho^2}[(\ln\rho)_{uu}+(\ln\rho)_{vv}].
$$

特别是，在

$$
\rho=\frac{1}{u^2+v^2+a^2}\quad (a\ 是常数)
$$

的场合，容易算出

$$
K=4a.
$$

高斯曲率 K 等于常数的曲面称为**常曲率曲面**．这类特殊曲面比较重要，在后面8.3段中将另行讨论．

习　题　八

1．证明下列表示式：

(1) $\sum\limits_{i,j} g_{ij}g^{ij}=2$；

(2) $H=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j}\Omega_{ij}g^{ij}$；

(3) $\Omega_{ij}=-\sum\limits_{k}\omega_i^k g_{kj}$．

2．设曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,\ v)$ 的第一和第二基本量分别为 E、F、G 和 L、M、

N，高斯曲率为 K． 又设经过参数变换 $(u, v)\to(\bar{u}, \bar{v})$ 后，第一和第二基本量分别变为 $\bar{E}$、$\bar{F}$、$\bar{G}$ 与 $\bar{L}$、$\bar{M}$、$\bar{N}$，而且高斯曲率变为 $\bar{K}$． 证明下列各关系：

(1) $\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2=(EG-F^2)\left[\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}\right]^2$；

(2) $\bar{L}\bar{N}-\bar{M}^2=(LN-M^2)\left[\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}\right]^2$；

(3) $\bar{K}=K$，

式中 $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ 是参数变换 $u=u(\bar{u}, \bar{v})$、$v=v(\bar{u}, \bar{v})$ 的雅可比式．

3．用记号 E、F、G；L、M、N 表示(5.11)式的 $\omega_i^m(i, m=1, 2)$．

4．用记号 E、F、G；L、M、N 及其偏导数表示克氏记号 $\Gamma_{ij}^k(i, j, k=1, 2)$．

5．试证明：$\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ln g}{\partial u^i}=\Gamma_{1i}^1+\Gamma_{2i}^2$　$(i=1, 2)$．

6．试证明：

(1) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=[ik, j]+[jk, i]$；

(2) $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial u^k}=-\sum\limits_l(g^{il}\Gamma_{lk}^j+g^{jl}\Gamma_{lk}^i)$．　$(i, j, k=1, 2)$

7．试证明：

(1) $K=\begin{vmatrix}\omega_1^1 & \omega_1^2\\ \omega_2^1 & \omega_2^2\end{vmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=K(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$．

8．试证明：曲面在正交网下的基本方程为(5.25)和(5.26)式．

9．设曲面 S 的第一基本形式采取下列一种时(式中 a 是常数)，试证明 S 必是常曲率曲面：

(1) $\mathrm{I}=\dfrac{du^2+dv^2}{\left[1+\dfrac{a}{4}(u^2+v^2)\right]^2}$；

(2) $\mathrm{I}=\dfrac{a^2}{v^2}(du^2+dv^2)$　$(v>0)$；

(3) $\mathrm{I}=du^2+e^{\frac{2u}{a}}dv^2$；

(4) $\mathrm{I}=du^2+\mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}dv^2$．

5.5 小结

本节的内容由三部分组成，即：基本公式、基本方程和基本定理.

基本公式描述了曲面在其各点的活动标架$\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}\}$所满足的一组偏微分方程.

基本方程包括高斯方程和科达齐方程，代表了曲面的第一和第二基本量之间的一组条件. 高斯方程表明，曲面的高斯曲率K是仅仅由第一基本量确定的内在几何量.

基本方程作为上述偏微分方程组的可积条件，保证了曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$作为这组的解的存在性.

在本节开头，我们引进了一套符号，如g_{ij}、Ω_{ij}以及后来的Γ^k_{ij}、R_{hijk}. 这些记号的展开式很繁，而形式上却很简洁. 这样，利用它们，便可简化许多公式的表述. 而且象g_{ij}、Ω_{ij}、R_{hijk}等这类张量的符号可以直接推广到高维的场合. 这方面超出了本书的范围，这里就不涉及了.

第六节 曲面的测地线

6.1 测地曲率

在曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$上给定了一条曲线

$$C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s), v(s)),$$

其中s是C的弧长参数. 根据4.1段的讨论，我们把C在其一点P的曲率向量$k\boldsymbol{N}$沿着曲面法向量$\boldsymbol{n}$和切平面T_P分解为法曲率向量和测地曲率向量两部分：

$$k\boldsymbol{N}=\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\tau}, \tag{6.1}$$

式中

$$\boldsymbol{\nu}=k_n\boldsymbol{n}, \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{\tau}=k_g(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}), \tag{6.3}$$

$\boldsymbol{T}$ 是 C 的切线向量, k_n 和 k_g 分别是法曲率和测地曲率. 从此可得

$$k^2=k_n^2+k_g^2. \tag{6.4}$$

在本段, 我们将导出测地曲率的两种表示式, 即: 贝尔特拉米公式和刘维尔公式.

这里仍然采用上一节引入的记号. 由定义, 曲线 C 的曲率向量

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{N}&=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\sum_i\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{r}_i\right)\\ &=\sum_k\frac{d^2u^k}{ds^2}\boldsymbol{r}_k+\sum_i\frac{du^i}{ds}\frac{d\boldsymbol{r}_i}{ds}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

按照曲面论的基本公式(5.14),

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{ds}=\sum_j\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{r}_{ij}=\sum_j\frac{du^j}{ds}\cdot\left(\sum_k\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{r}_k+\Omega_{ij}\boldsymbol{n}\right),$$

代入(6.5)式, 我们得到

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{N}=&\sum_k\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k\\ &+\sum_{i,j}\Omega_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{n}. \end{aligned}$$

右端的第一项是 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的线性组合, 因而它代表曲面在 P 点的切向量; 第二项代表一个平行于 $\boldsymbol{n}$ 的向量. 所以,

$$\boldsymbol{\nu}=\sum_{i,j}\Omega_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{n}, \tag{6.6}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\sum_k\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k. \tag{6.7}$$

由于 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}$ 是单位向量, 从(6.3)式容易看出

$$k_g=(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\tau})$$
$$=\left(\boldsymbol{n},\ \sum_l \frac{du^l}{ds}\boldsymbol{r}_l,\ \sum_k\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k\right).$$
$$(6.8)$$

可是 $$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\sqrt{g}\,\boldsymbol{n},$$

(6.8)式可写为

$$k_g=\sqrt{g}\left\{\frac{du^1}{ds}\left(\frac{d^2u^2}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{du^2}{ds}\left(\frac{d^2u^1}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right\}. \qquad (6.9)$$

这就是贝尔特拉米(Beltrami)公式. 由此可见, 测地曲率只和曲面的第一基本量有关,所以它是一个内在几何量.

特别地, 当曲面的参数曲线网是正交时,有 $F=0$, 从而

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{G}}. \qquad (6.10)$$

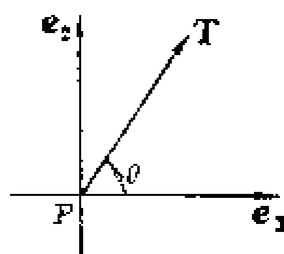


图 2·48

如前所述,对于 T_P 的任一向量 $\boldsymbol{T}$, 可写下

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta,$$

式中 θ 表示从 $\boldsymbol{e}_1$ 到 $\boldsymbol{T}$ 的有向夹角(图 2·48).

另一方面,

$$\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{r}_1\frac{du^1}{ds}+\boldsymbol{r}_2\frac{du^2}{ds}$$
$$=\sqrt{E}\boldsymbol{e}_1\frac{du^1}{ds}+\sqrt{G}\boldsymbol{e}_2\frac{du^2}{ds}.$$

比较上列两式的结果,得

$$\sqrt{E}\frac{du^1}{ds}=\cos\theta,\quad \sqrt{G}\frac{du^2}{ds}=\sin\theta. \qquad (6.11)$$

从曲面单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2,$$

又有 $$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1.$$

于是，

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta)=\boldsymbol{e}_2\cos\theta-\boldsymbol{e}_1\sin\theta,$$

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\left(\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}\cos\theta+\frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}\sin\theta\right)+(-\boldsymbol{e}_1\sin\theta+\boldsymbol{e}_2\cos\theta)\frac{d\theta}{ds}.$$

又因为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是单位正交组，

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}\quad (i,\ j=1,\ 2).$$

两边对 s 求导：

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}=0,\quad \boldsymbol{e}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}=0,\quad \boldsymbol{e}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}=-\boldsymbol{e}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}.$$

从上述关系式便得到

$$\begin{aligned}k_g&=(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\tau})=(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{T},\ k\boldsymbol{N}-k_n\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})\cdot\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\\&=(\boldsymbol{e}_2\cos\theta-\boldsymbol{e}_1\sin\theta)\cdot\left[\left(\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}\cos\theta+\frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}\sin\theta\right)\right.\\&\qquad\left.+(-\boldsymbol{e}_1\sin\theta+\boldsymbol{e}_2\cos\theta)\frac{d\theta}{ds}\right]\\&=\frac{d\theta}{ds}+\boldsymbol{e}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}.\end{aligned}$$

另一方面，按照正交网下的基本公式(5.16)又有

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}&=\frac{d}{ds}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}}\right)\\&=\frac{dE^{-\frac{1}{2}}}{ds}\boldsymbol{r}_1+\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\boldsymbol{r}_{11}\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_{12}\frac{dv}{ds}\right)\\&=(*)\boldsymbol{n}+(*)\boldsymbol{r}_1\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{E}}\left(-\frac{E_2}{2G}\frac{du}{ds}+\frac{G_1}{2G}\frac{dv}{ds}\right)\boldsymbol{r}_2,\end{aligned}\tag{6.12}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 的系数在以后的计算中没有用处，所以仅用记号(*)表示之．由于

$$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{r}_1=0,\quad \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{r}_2=\sqrt{G},$$

对(6.12)的两边点乘 $\boldsymbol{e}_2$ 并代入 k_g 的表示式中，结果得

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(-E_v\frac{du}{ds}+G_u\frac{dv}{ds}\right).\qquad(6.13)$$

再把(6.11)代入上式右端，便有

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta.$$

$$(6.14)$$

这就是计算测地曲率的刘维尔(Liouville)公式．

特别是，对于 u 曲线，$\theta=0$(参见图 2-48)．从(6.14)得出它的测地曲率

$$k_{g_1}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}.\qquad(6.15)$$

同样，v 曲线的测地曲率是

$$k_{g_2}=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}.\qquad(6.16)$$

这样一来，刘维尔公式(6.14)又可以写成下列形式：

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}+k_{g_1}\cos\theta+k_{g_2}\sin\theta.$$

$$(6.17)$$

【例】 求旋转面上各纬线的测地曲率．

解：旋转面的任一纬线 C 都是半径为 R 的圆．在圆 C 的一点 P 处作经线的切线时，它与旋转轴

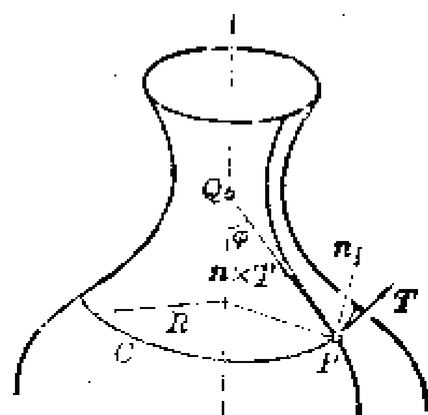


图 2-49

的交角 φ 沿 C 是常数(图 2-49)．从圆 C 的曲率 $\kappa=\dfrac{1}{R}$ 和

曲率向量

$$kN = \boldsymbol{\nu} + k_g(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{T})$$

得知，C 在 P 点的测地曲率是

$$k_g = kN \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{T}) = k \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{R},$$

即

$$k_g = \frac{1}{PQ}.$$

6.2 测地线

定义 如果曲面的一条曲线在其各点处的测地曲率都等于0，则称为测地线。

这就等于说，测地线是测地曲率向量 $\boldsymbol{\tau} = 0$ 的曲线．从(6.7)式立即得出测地线的微分方程为

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2). \qquad (6.18)$$

这是一组二阶常微分方程．若给出初始条件：

当 $s = s_0$ 时，

$$u^i = (u^i)_0, \quad \frac{du^i}{ds} = \left(\frac{du^i}{ds}\right)_0 \quad (i = 1, 2), \qquad (6.19)$$

即当给定曲面的一点和在这点的一个切向量时，方程组(6.18)便有唯一解

$$u^i = u^i(s) \quad (i = 1, 2).$$

因此，$\boldsymbol{r}(u^1(s), u^2(s))$ 表示一条过初始点 $\boldsymbol{r}((u^1)_0, (u^2)_0)$ 且和初始方向 $\boldsymbol{T}\left(\left(\frac{du^1}{ds}\right)_0, \left(\frac{du^2}{ds}\right)_0\right)$ 相切的测地线．故得

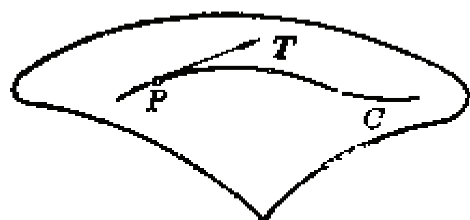


图 2-50

定理1 当给定曲面的一点和在这点的切向量 $\boldsymbol{T}$ 时，则过这点且切于 $\boldsymbol{T}$ 的测地线唯一存在(图 2-50)。

上面从理论上保证了测地线的唯一存在性，但是对于具体问题来说，要解一组二阶常微分方程(6.18)，却不是简单的事情. 在实际问题中，一般使用的是数值计算.

当曲面的参数曲线 u、v 构成正交网时，从刘维尔公式(6.14)得出测地线的微分方程为

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta. \quad (6.20)$$

按照(6.11)式，即：

$$\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta, \quad (6.21)$$

$$\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta. \quad (6.22)$$

改写(6.20)，便有

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{du}=\dfrac{1}{2\sqrt{G}}\left(-\dfrac{E_v}{\sqrt{E}}+\dfrac{G_u}{\sqrt{G}}\operatorname{tg}\theta\right),\\ \dfrac{dv}{du}=\sqrt{\dfrac{E}{G}}\operatorname{tg}\theta.\end{cases} \quad (6.23)$$

最后的这组方程是测地线的另一种表示，其中把 u 看做自变量，把 θ 和 v 看做 u 的两个待定函数. 当给定曲面的一点和切线方向时，即：

$$\theta(u_0)=\theta_0, \quad v(u_0)=v_0,$$

则便有唯一的测地线 $v=v(u)$.

下面给出测地线的几何特征(证明从略)：

定理 2 假设曲面曲线 C 的曲率 $k\neq0$，则 C 成为测地线的充要条件是：它在每点的主法线和曲面在同一点的法线一致.

【例 1】 求球面的测地线.

解：过球心的平面截球面所得的圆称为大圆. 由于大圆

的主法线和球面法线一致，所以大圆是球面上的测地线．又因为过球面上任意一点及任一切方向都可作唯一的大圆弧，根据定理1得知：球面上的所有测地线都是大圆弧．

从6.1段的例题还可知道：球面上的小圆不是测地线，因为沿着小圆的测地曲率等于非零常数 $\frac{1}{PQ}$．

【例2】 圆柱面上的测地线是圆柱螺线．

【证】 设圆柱面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ v\},$$

第一基本量为

$$E=a^2,\quad F=0,\quad G=1.$$

由于曲面的参数曲线网是正交网，我们从(6.23)得出测地线的微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{du}=0\\[2mm]\dfrac{dv}{du}=a\operatorname{tg}\theta.\end{cases}$$

按照初始条件

$$\theta(u_0)=\theta_0,\quad v(u_0)=v_0,$$

解得

$$\begin{cases}\theta=\theta_0\\ v=bu+c,\end{cases}$$

式中常数 $b=a\operatorname{tg}\theta_0,\quad c=v_0-(a\operatorname{tg}\theta_0)u_0.$

因而测地线方程是圆柱螺线

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ bu+c\}.$$ 】

【例3】 求旋转面 S 的测地线．

$$S:\ \boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}.$$

解：S 的第一基本量

$$E=f^2(v),\quad F=0,\quad G=[f'(v)]^2+[g'(v)]^2.$$

测地线的微分方程(6.23)变成

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\theta}{du}=-\dfrac{E_v}{2\sqrt{EG}}, \\[2ex]
\dfrac{dv}{du}=\sqrt{\dfrac{E}{G}}\operatorname{tg}\theta.
\end{cases}
\tag{6.24}
$$

由此得出
$$\frac{d\theta}{dv}=-\frac{E_v}{2E\operatorname{tg}\theta},$$

即
$$\operatorname{tg}\theta\, d\theta=-\frac{f'}{f}\,dv.$$

积分后，得
$$f\cos\theta=c, \tag{6.25}$$

或者
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{f^2-c^2}}{c},$$

式中，c 是常数.

于是(6.24)的第二式化为
$$du=\frac{c}{f}\sqrt{\frac{f'^2+g'^2}{f^2-c^2}}\,dv.$$

积分后，得
$$u=c\int\frac{1}{f}\sqrt{\frac{f'^2+g'^2}{f^2-c^2}}\,dv+d, \tag{6.26}$$

式中 d 是常数.

我们还可证明：旋转面的经线都是测地线，而纬线一般不是测地线.

图 2-51 中画的纬线 C_2 不是测地线，但是 C_1 和 C_3 是测地线，因为后二曲线分别处在曲面的最细处和最粗处.

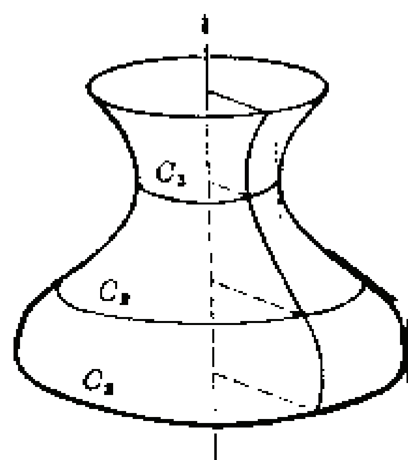


图 2-51

【例 4】 设曲面 S 的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\frac{a^2}{v^2}(du^2+dv^2)\quad (a\ 为常数,\ v>0),$$

求它的测地线.

解：同前例一样，首先指出 S 的第一基本量为

$$E=G=\frac{a^2}{v^2},\quad F=0,$$

因而 $(u,\ v)$ 是曲面的正交网．这样，方程(6.23)变为

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d\theta}{du}=-\frac{1}{v},\\&\frac{dv}{du}=\operatorname{tg}\theta,\end{aligned}\right.\tag{6.27}$$

由此便有
$$\operatorname{tg}\theta\, d\theta=-\frac{dv}{v}.$$

积分后，得
$$\cos\theta=\frac{v}{c},$$

于是求得
$$\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{\sqrt{c^2-v^2}}{v}.$$

将上式代入(6.27)的第二式，得

$$du=\mp\frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}\,dv,$$

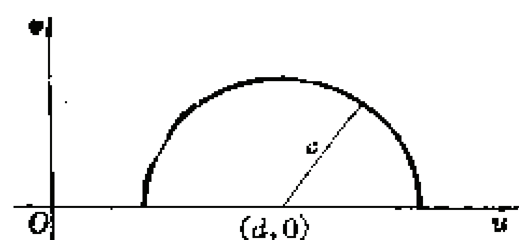


图 2-52

经过积分，结果是

$$u=\mp\sqrt{c^2-v^2}+d,$$

式中，c 和 d 都是常数.

这样，得到测地线的方程为

$$(u-d)^2+v^2=c^2\quad (v>0).\tag{6.28}$$

它在参数 $(u,\ v)$ 平面上被表示为一个半圆，它的中心在 u 轴上(图 2–52).

习　题　九

1. 应用定理2试证明：在直圆柱面上的圆柱螺线是所在圆柱面的测地线.
2. 试证明：柱面的测地线是一般螺线.
3. 求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ bu\}$ 上的测地线.
4. 设曲面的第一基本形式如下所示，求各曲面的测地线：
   (1) $\mathrm{I}=\rho^2(u)(du^2+dv^2)$；
   (2) $\mathrm{I}=v(du^2+dv^2)$.
5. 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=du^2+G(u,\ v)dv^2$，
   (1) 求 $\Gamma_{ij}^k\ (i,\ j,\ k=1,\ 2)$；
   (2) 试证明：u 曲线是测地线；
   (3) 求高斯曲率 K；
   (4) 设测地线与 u 线的交角为 θ，证明 $\frac{d\theta}{dv}=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$.

6.3　测地坐标系

平面上常用的坐标系是直角坐标系$(x,\ y)$和极坐标系$(\rho,\ \theta)$两种．其中，相当于x线和ρ线的曲线都是直线，即平面的测地线，而且相当于y线和θ线的曲线分别同x线和ρ线正交，形成了测地线族的正交轨线．按照同样的想法，我们在曲面上可以建立相应的坐标曲线网，现在分述于下：

(1) 测地坐标系

定义　设曲面的参数曲线网是正交网，而且其中一族参数曲线是测地线，则称这种坐标网为曲面的测地坐标系（图2-53）.

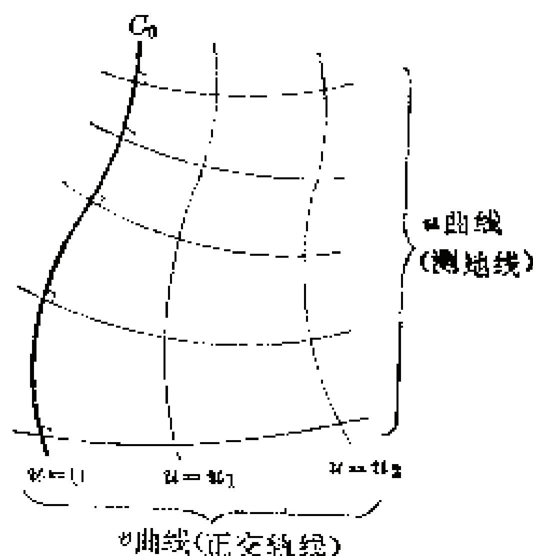


图　2-53

构造测地坐标系的步骤如下：

(i) 在曲面上任意取定一条曲线 C_0；

(ii) 过 C_0 上的每一点作垂直于 C_0 的测地线，根据 6.2 段定理 1，这种测地线是唯一存在的，从而获得一族测地线；

(iii) 作这族测地线的正交轨线族，关于它们的存在性可参见 3.2 段的例题。

(iv) 选取这族测地线和这族正交轨线分别作为 u 曲线和 v 曲线，而且使曲线 C_0 恰恰对应于 $u=0$。

这时有 $F=0$。又因为每条 u 曲线都是测地线，按照 (6.15) 式，u 曲线的测地曲率为零的条件变为

$$-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}=0,$$

即 $E_v=0$，所以 E 与参数 v 无关：$E=E(u)$，因此

$$\mathrm{I}=E(u)du^2+G(u,\ v)dv^2.$$

再作参数变换

$$\begin{cases} \bar{u}=\int_0^u \sqrt{E(u)}\,du \\ \bar{v}=v, \end{cases}$$

而且把 $\bar{u}$、$\bar{v}$ 写作 u、v，就得出曲面在测地坐标系下的第一基本形式

$$\mathrm{I}=du^2+G(u,\ v)dv^2. \tag{6.29}$$

这样，第一基本形式就简化了。

现在，我们来计算那段介于参数 u_1 和 u_2 之间的测地线 $v=v_0$ 的弧长 $\mathscr{L}$。由于沿 u 曲线，$dv=0$，所以从 (6.29) 求得

$$\mathscr{L}=\int_{u_1}^{u_2} du=u_2-u_1.$$

因此，介于任意两条正交轨线之间的测地线段是等长的，而且 u 是每一条测地线的弧长。

在构造测地坐标系的过程中，曲线 C_0 是可以任意选定的，因此，在一张曲面上可以有无穷多种测地坐标系. 如果适当地选择 C_0，还可以把 $G(u, v)$ 化得更简单一些.

【例】 当选定曲面上任一测地线作为 C_0，而且选定曲线 C_0 的弧长作为参数 v 时，由此构造的测地坐标系下的第一基本形式为

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2, \tag{6.30}$$

其中系数 $G(u, v)$ 满足下列条件：

$$\begin{cases} G(0, v) = 1 \\ G_u(0, v) = 0. \end{cases} \tag{6.31}$$

实际上，在曲线 C_0 上 $u=0$，$v=s$. 故沿 C_0 必有 $du=0$，$dv=ds$ 成立. 把这些代入(6.30)式，得

$$ds^2 = G(0, v)ds^2,$$

从而(6.31)的第一式成立.

另一方面，沿测地线 C_0 的测地曲率 $k_{g_2}=0$. 从(6.16)式得知

$$\left.\frac{\partial \ln G(u, v)}{\partial u}\right|_{u=0} = 0.$$

在后面 8.3 段，我们将用第一基本形式(6.30)以决定常曲率曲面的线素.

(2) 测地极坐标系 在曲面上给定任意一点 P，沿着 P 点的每一切方向作一条测地线. 这样就得到一族测地线和这族的正交轨线.

我们在曲面上选取这样的参数曲线网，使得上述测地线和正交轨线分别是 u 曲线和 v 曲线. 这种坐标网称为测地极坐标系(图 2-54)，P 点为极点，v 曲线为测地圆.

从上述的测地极坐标系立即得到曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=du^2+G(u,v)dv^2,$$

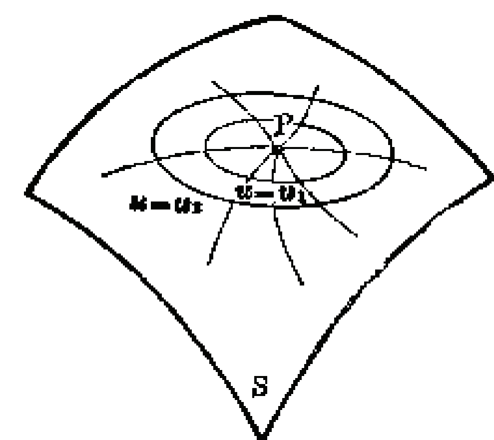


图 2-54

式中参数 u 是每一条测地线的弧长. 而且由任意两条正交轨线 $u=u_1$ 和 $u=u_2$ 所截下的任一测地线段都是等长的.

在平面场合，测地坐标系和测地极坐标系分别是平面直角坐标系和平面极坐标系.

必须指出，上述的两种测地坐标系，只存在于曲面在 P 点的邻域范围. 这项限制对于我们研究的局部几何是合适的，但是它不适用于曲面整体性质的研究.

(3) 测地线长度的最短性 作为测地极坐标系的应用，我们证明测地线长度的最短性，即

定理 设 P、Q 是曲面上小区域 $\mathscr{D}$ 中的两点，C 是 $\mathscr{D}$ 中连接 P、Q 两点和长度为 $\mathscr{L}$ 的测地线段；C^* 是 $\mathscr{D}$ 中任意一条连接 P、Q 和长度为 $\mathscr{L}^*$ 的另一曲线段，则 $\mathscr{L}^*\geqslant\mathscr{L}$.

【证】 我们在区域 $\mathscr{D}$ 中采用以 P 为极点的测地极坐标系(图 2-55)，于是测地线段 C 的方程为

$$v=v_0 \quad (0\leqslant u\leqslant\mathscr{L}).$$

设曲线段 C^* 的方程为

$$\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b),$$

$$u(a)=0, \quad u(b)=\mathscr{L}.$$

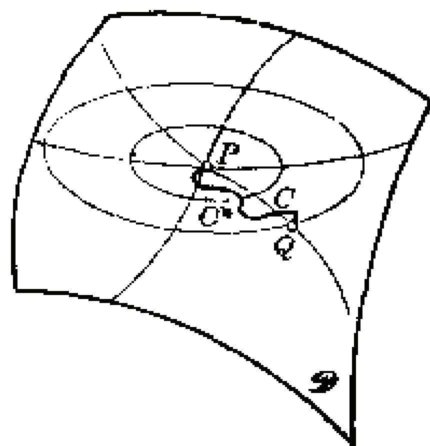


图 2-55

在测地极坐标系中，曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2,$$

式中 $G(u, v)>0$. 曲线段 C^* 的长度为

$$\mathscr{L}^* = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G(u, v)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\geqslant \int_a^b \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b du = u(b) - u(a) = \mathscr{L}. \ ∎$$

上述的定理表明了测地线是在局部范围内连接两点的最短线. 我们知道, 平面上连接两点的最短线是直线段, 因此, 在距离最短性的意义下, 测地线是平面的直线在曲面的推广.

在定理的条件中加了"小区域 $\mathscr{D}$"这种限制, 是因为在大范围内测地极坐标系不一定存在, 从而就不能得出定理的结论. 例如, 在球面上, 连接两点 P、Q 的测地线是大圆. 但以 P、Q 为端点的大圆弧有两条, 其中短的那条是最短连线, 长的就不是. 事实上, 只要取区域 $\mathscr{D}$ 的范围不超过半球时, 上述定理是成立的.

6.4 高斯-保纳公式

如所周知, 平面上的三角形的三内角之和等于 π. 如何把这个定理推广到曲面上去, 是本段要加以解决的问题.

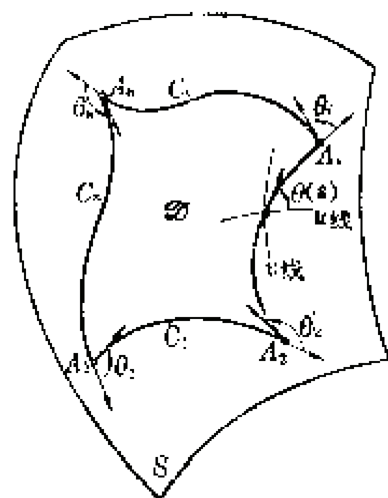


图 2-56

设曲线 C 是一条在曲面 S 上分段光滑的闭曲线, 它由若干段光滑曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 首尾相接而组成, 其中每相邻两段曲线的切向量在连接点 A_i 处有一个角度(设为 θ_i)的"跳跃"(图 2-56). 又设由 C 所包围的区域 $\mathscr{D}$ 是曲面上的单连通区域. 我们选取曲面上的正交网作为参数曲线网, 并把 C 的参数方程

表成

$$\begin{cases} u=u(s) \\ v=v(s), \end{cases}$$

式中，$u(s)$ 和 $v(s)$ 为弧长 s 的分段光滑函数．

设 $\theta(s)$ 是 C 在 s 处的切向量与 u 曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 之间的夹角．那末，它沿着曲线段 C_i 的改变量是可用积分 $\int_{C_i} d\theta$ 表示的．因此，$\theta(s)$ 沿着 C 的总改变量是

$$\int_C d\theta=\sum_i \int_{C_i} d\theta.$$

另一方面，我们在曲线 C 的每个棱角 A_i 处添上一小段曲线 C_i^*，使得各段 $\bar{C}_i$ 和 C_i^* 连接成一整条光滑曲线 C^*(图 2-57)．这样一来，θ 角沿着光滑曲线 C^* 的总改变量为 2π*)，

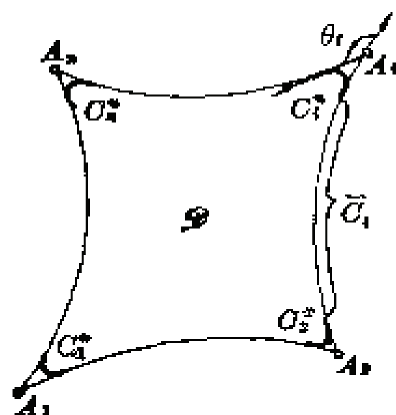


图 2-57

即

$$\sum_i \int_{\bar{C}_i} d\theta+\sum_i \int_{C_i^*} d\theta=2\pi.$$

从图 2-57 看出，当 C_i^* 取得充分小时，曲线段 $\bar{C}_i \to C_i$，且

$$\int_{C_i^*} d\theta \to \theta_i.$$

于是

$$\int d\theta=\sum_i \int_{C_i} d\theta=2\pi-\sum_i \theta_i. \tag{6.32}$$

另一方面，按照测地曲率的刘维尔公式(6.13)，有

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(-E_v \frac{du}{ds}+G_u \frac{dv}{ds}\right).$$

将上式两边绕曲线 C 一周关于弧长 s 作积分：

---

*) 这一结论的严格证明涉及到整体微分几何学的"旋转指标定理"，这里从略．

$$\int_C k_g\,ds=\int_C d\theta-\int_C \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-E_v\,du+G_u\,dv),\quad (6.33)$$

并且运用格林公式到上式右端第二项积分，便导出

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-E_v\,du+G_u\,dv)&=\iint_D\left\{\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u\right\}du\,dv\\&=-\iint_D K\sqrt{EG}\,du\,dv=-\iint_D K\,dA,\end{aligned}$$

式中 $dA=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sqrt{EG}\,du\,dv$

表示区域 $\mathscr{D}$ 的面积元.

最后，把(6.32)式和上式代入(6.33)式的右端，便得到

$$\sum_i\theta_i+\int_C k_g\,ds+\iint_D K\,dA=2\pi,\qquad (6.34)$$

这就是高斯-保纳(Gauss-Bonnet)公式.

高斯-保纳公式有十分重要的几何意义：公式左端的三项依次代表点曲率、线曲率和面曲率，而公式表明这三者之和等于 2π.

高斯-保纳公式的推导过程主要用到三个工具：刘维尔公式、格林公式和高斯方程.

当曲线 C 由三条测地线 C_1、C_2、C_3 组成时，则 C 称为曲面上的测地三角形．它是平面三角形在曲面上的推广.

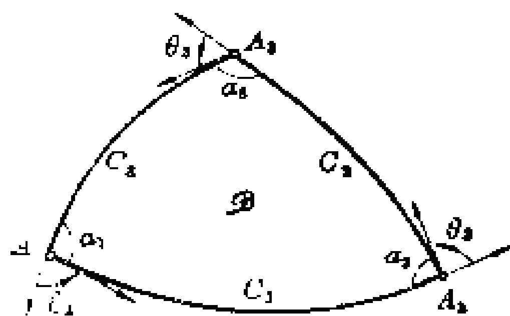


图 2-58

如图 2-58 所示，三条测地线 C_1、C_2、C_3 组成一个测地三角形 $A_1A_2A_3$，设它的三内角为 α_1, α_2, α_3, 外角为

$$\theta_i=\pi-\alpha_i \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

由于 $C_i(i=1,\ 2,\ 3)$是测地线，测地曲率 $k_g=0$. 从高斯-保纳公式得出

$$\sum_{i=1}^{3}(\pi-\alpha_i)+\iint_D K\,dA=2\pi.$$

因此，曲面上的任一测地三角形的三内角之和是

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\pi+\iint_D K\,dA. \tag{6.35}$$

当 S 是平面时，高斯曲率 $K=0$, 所以平面三角形的三内角之和等于 π. 由此可见，(6.35)式是平面三角形的内角和公式在曲面上的推广.

若 S 是常曲率曲面，高斯曲率 $K=$常数，(6.35)便成为

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\pi+KA, \tag{6.36}$$

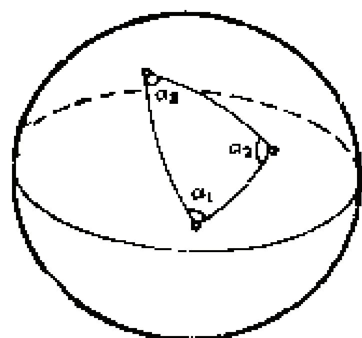


图 2-59

式中 A 表示测地三角形的面积.

例如，在半径为 a 的球面上，高斯曲率 $K=\frac{1}{a^2}>0$. 从(6.36)立即得出：球面三角形(即球面上三大圆所围成的三角形)的三内角之和大于 π(图2-59). 这一性质反映在大地测量工程中.

比方说，我们取广州、哈尔滨、乌鲁木齐三个城市作为球面三角形的顶点. 三角形面积 $A\approx4\times10^6$ 平方公里. 地球半径为 6400 公里，高斯曲率 $K=(6400)^{-2}\approx2.5\times10^{-8}$,

$$KA\approx0.1 \text{ 弧度}.$$

这说明，在地球上，当一个球面三角形的面积占据半个中国大小时，三内角之和与 π 之间有着 0.1 弧度的差别.

若 S 是负常曲率曲面，$K<0$. 这时，测地三角形的三内角之和小于 π.

在常曲率曲面上，测地三角形的内角之和同 π 之差与非欧几何模型有着密切的联系，对此，我们将在后面 8.4 段中作进一步的介绍.

6.5 小结

本节的中心内容是曲面上的测地线及其应用.

平面上的直线是连接平面上两点的最短线. 它在曲面上的拓广就是测地线. 不过，测地线这个概念较广一些，包括连接两点的最短线在内. 测地曲率和测地线的名称最早是从大地测量学取来的.

测地线的特征是它的测地曲率 $k_g=0$，几何解释是：曲线的主法线和曲面的法线一致.

测地线的微分方程组是

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0 \quad (i=1,\ 2).$$

测地线在工程技术中的应用，就是复杂曲面的外板展开. 这种扳金技术在造船、航空、汽车等工业部门的外形设计和制造中有着实际的应用. 我们将在 7.1 段中作为例子来介绍.

在曲面的正交网下，从刘维尔公式所导出的测地线的微分方程组是

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{du}=\dfrac{1}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{E}}-\dfrac{G_u}{\sqrt{G}}\operatorname{tg}\theta\right), \\ \dfrac{dv}{du}=\sqrt{\dfrac{E}{G}}\operatorname{tg}\theta. \end{cases}$$

我们已经利用这组方程求得若干曲面的测地线.

测地坐标系和测地极坐标系是曲面的两种特殊参数曲线网，其特点是：(1)正交网；(2) u 曲线是测地线族；(3) u 是每一条测地线的弧长参数；(4) 第一基本形式化为

$$\mathrm{I}=du^2+G(u,\ v)dv^2.$$

测地坐标系的优点在于：可用以化简第一基本量，使得 $E=1,\ F=0$.

作为测地曲率的应用，我们导出高斯-保纳公式

$$\sum_i \theta_i+\int_C k_g\,ds+\iint_D K\,dA=2\pi.$$

公式左端包括角度、测地曲率、高斯曲率等几何量，它们仅仅同曲面的第一基本形式有关，所以都是内在几何不变量．右端 2π 是常数．这是局部曲面论的高斯-保纳公式．到了整体曲面论，还有相应的高斯-保纳公式．总之，高斯-保纳公式在微分几何发展史上占着重要的地位．

第七节　几种曲面映射

7.1　等距映射

在本节，我们将讨论两张曲面的点与点之间的关系，即所谓映射．研究映射的发端，是出于实际问题的需要．例如在绘制地图时，实际上就遇到球面的点与平面的点之间的一一对应的问题，它就是球面到平面的映射．

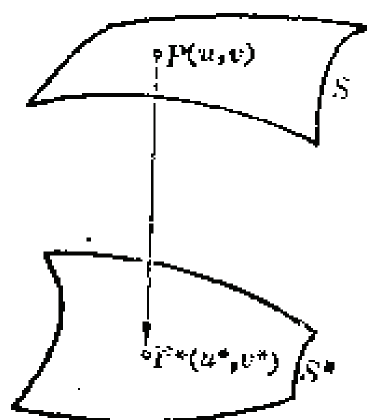


图　2-69

一般地，给定了两张曲面

$$S:\ \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),$$
$$S^*:\ \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^*(u^*,\ v^*),\qquad (7.1)$$

我们对 S 的一点 P 相应地取 S^* 的一点 P^*，使它们构成一一对应

$$P \to P^*, \tag{7.2}$$

而且称它为曲面 S 到曲面 S^* 的映射．如果用参数 (u, v) 和 (u^*, v^*) 分别代表 P 和 P^*（图 2-60），那末映射(7.2)的解析表示可写为

$$\begin{cases} u^* = u^*(u, v), \\ v^* = v^*(u, v). \end{cases} \tag{7.3}$$

为了保证一一对应，必须假定雅可比式

$$\frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

为了讨论的方便，我们在曲面 S^* 上作参数变换，使得两张曲面的对应点有相同的参数值．于是映射(7.2)便成为

$$P(u, v) \to P^*(u, v). \tag{7.4}$$

定义 当曲面 S 到曲面 S^* 的映射(7.3)保持着各曲面在对应点的第一基本形式时：

$$ds^2 = ds^{*2},$$

就称它为等距映射，或者称 S 和 S^* 为等距曲面．

特别是，当映射(7.4)成为等距，其条件为：两曲面有共同的第一基本量：

$$E(u, v) = E^*(u, v), \quad F(u, v) = F^*(u, v),$$
$$G(u, v) = G^*(u, v).$$

曲面 S 和 S^* 在等距映射下的两对应曲线段的弧长相等，两对应曲线之间的夹角和对应区域的面积也都相等．等距映射的涵义如下：S 和 S^* 尽管形状不同，但可以把曲面 S 连续变形，使之与曲面 S^* 相贴合．这里所谓变形，意味着：在 S 到 S^* 的贴合过程中，对 S 既不撕破，又不皱折，即是无伸缩地熨贴到 S^*．反过来，从 S^* 到 S 的贴合也是如此．

在等距映射下保持不变的几何量，称为曲面的内在几何量．按照内在几何量决定的几何性质，称为曲面的内在性质．因此，内在性质是曲面在等距映射下保持不变的几何性质．

由于等距映射只同曲面的第一基本形式有关，所以我们可断定：凡是用 E、F、G 表示的几何量，必定是内在几何量，包括曲面曲线的弧长、两曲线的交角、曲面面积、高斯曲率 K、测地曲率 k_g 等．由此可见，曲面的测地线和高斯–保纳公式都具有内在几何的意义．例如，两等距曲面的测地线互相对应．

同内在性质相对照，我们考察曲面的外在性质．后者经过等距映射就会发生变化．它们和曲面的第二基本形式都有关系．例如，曲面的法曲率、曲率线、主切曲线、脐点、平均曲率 H 等等，都具有外在性质．

研究曲面内在几何量和内在性质的几何学称为**内在几何学**．内在几何中所讨论的问题都是围绕着 ds^2 而开展的，同曲面的变形无关．

【例 1】 下列的两曲面是等距的：

悬链面

$$S:\ \boldsymbol{r}=\left\{a\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}\cos\theta,\ a\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}\sin\theta,\ t\right\}\ \begin{pmatrix}-\infty<t<+\infty\\ 0<\theta<2\pi\end{pmatrix}.$$

正螺面

$$S^*:\ \boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ au\}\ \begin{pmatrix}0<u<2\pi\\ -\infty<v<+\infty\end{pmatrix}.$$

实际上，S 和 S^* 的第一基本形式分别为：

$$S:\ ds^2=\mathrm{ch}^2\frac{t}{a}\cdot(a^2d\theta^2+dt^2),$$

$$S^*:\ ds^{*2}=(v^2+a^2)du^2+dv^2.$$

我们用参数变换

$$\begin{cases} u = \theta, \\ v = a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{t}{a}, \end{cases} \tag{7.5}$$

以表 S^* 与 S 之间的对应．这时

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, t)} = \mathrm{ch}\,\frac{t}{a} \neq 0.$$

从 $$du = d\theta, \quad dv = \mathrm{ch}\,\frac{t}{a}\,dt, \quad v^2 + a^2 = a^2\,\mathrm{ch}^2\,\frac{t}{a},$$

又得出曲面 S^* 的第一基本形式为

$$ds^{*2} = (v^2 + a^2)du^2 + dv^2 = \mathrm{ch}^2\,\frac{t}{a} \cdot (a^2 d\theta^2 + dt^2) = ds^2.$$

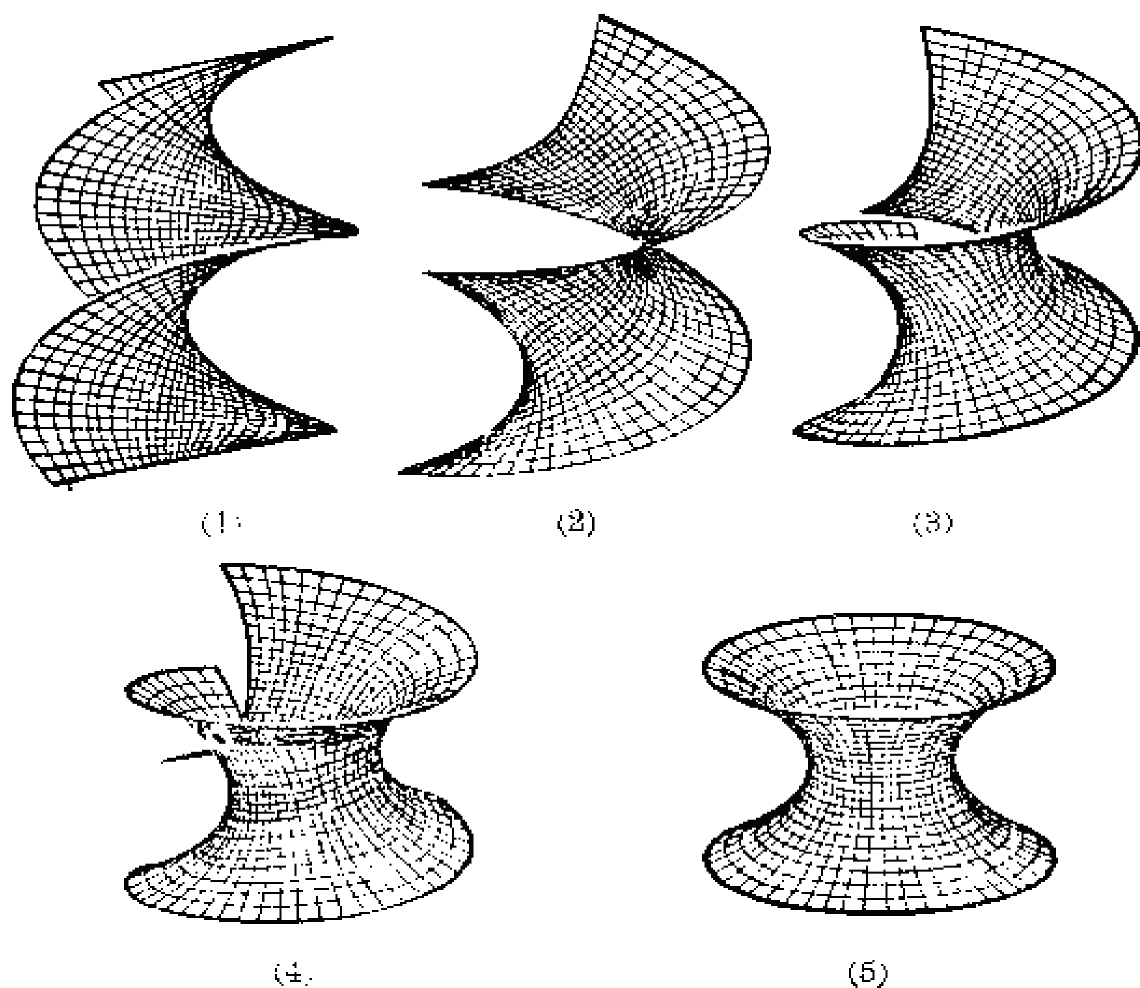


图　2-61

正螺面与悬链是外在形状不同的两种曲面，单凭直观印象，很难想象两者是可变形的．图 2-61 画了怎样从正螺面出发，经过逐渐的变形，变成一张悬链面的过程．

从这例子看出，判断两张曲面 S 与 s^* 是否等距，关键在于有没有象(7.5)这样的参数变换式，使得 S 与 S^* 在对应点具有相同的第一基本形式．

一般地说，要对两曲面 S 和 S^* 作出等距性判断，并不容易．我们必须寻找形如(7.5)的参数变换式，这需要有一定的技巧．

因为高斯曲率 K 是曲面的内在几何量，它在等距映射下保持不变．因此，K 的不变性是为了判别曲面是否等距的必要条件．例如，凸曲面($K>0$)与鞍面($K<0$)不可能等距．

在 8.3 段，我们要证明：当 $K=K^*=$ 常数时，S 与 S^* 必定是等距的．这就是说，两个常曲率曲面 S 与 S^* 等距的充要条件是 $K=K^*$．

可展曲面的 $K=0$(习题七第 9 题)，所以任意的两可展曲面互相等距．当然，可展曲面和平面等距．直观意义是：可展曲面可以经过无伸缩的变形，使它与平面相贴合．“可展”的名称就是由此来的．把一张薄纸无伸缩地变形，便能够造出一种柱面、锥面或切线面(图 2-62)．

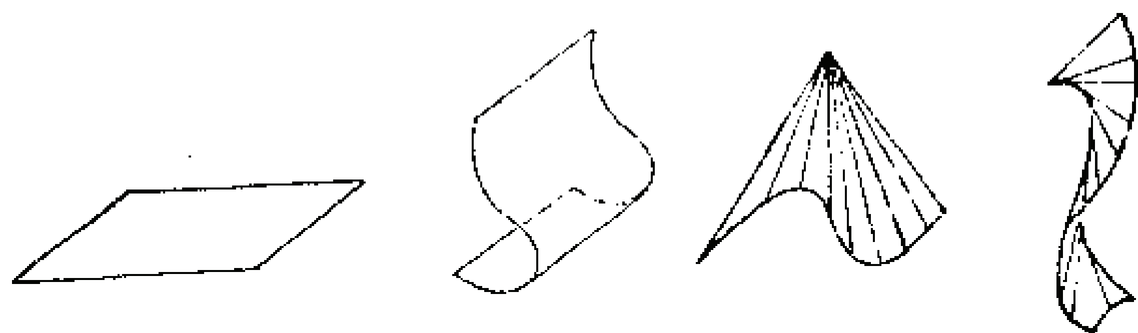


图 2-62

【例 2】 外板展开

在造船厂中，船体曲面是由许多块弯曲的钢板焊接起来的(图 2-63)，而且弯曲的钢板由平板辊轧而成．辊轧之前，先把平板切割成曲边四边形．人们要设计每块平板的曲边四边形，使得它经过切割、辊轧后送到船台上装配时，相邻两块钢板的边界恰好拼合无缝．这项工作称为外板展开，也是扳金技术中特别重要的问题．

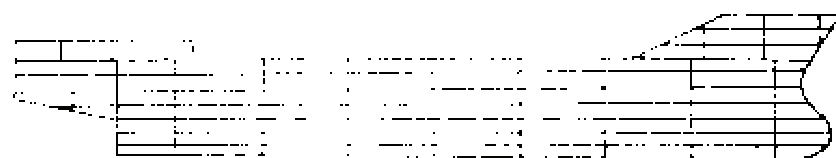


图 2-63

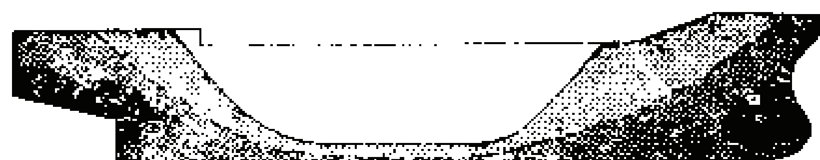


图 2-64

在船体曲面上，$K=0$ 的部分总是可以无误差地展成平面的．相反，对 $K\neq 0$ 的部分，只能近似地展成平面．对于这种区域，我们要把钢板分割得比较小些，以尽可能减少展开时的变形程度．近来，国内外造船厂采用一种先进的办法：用计算机算出船体曲面的高斯曲率，画出曲率分布图(图 2-64)，然后按照高斯曲率的大小来决定板缝排列．

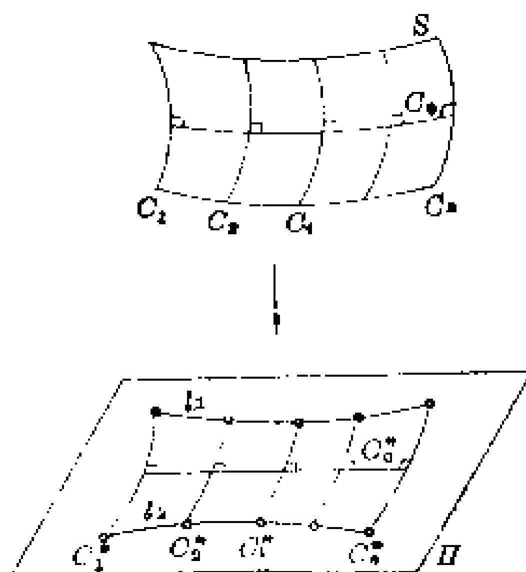


图 2-65

对于 $K=0$ 的区域，外板

展开的过程就是寻找曲面 S 到平面 Π 的一种等距映射. 把工艺方法简要地翻译成微分几何的语言，就是(图 2-65)：

(1) 在曲面 S 上决定一条测地线段 C_0；

(2) 当 C_0 等距映射成平面 Π 上的直线段 C_0^* 时，C_0 与 C_0^* 的长度相等；

(3) 在曲面 S 上作一族垂直于 C_0 的曲线段 $C_i(i=1, 2, \cdots, n)$；

(4) 把 C_i 等距映射为 Π 上的曲线 $C_i^*(i=1, 2, \cdots, n)$ 时，C_i 和 C_i^* 的长度相等，而且 C_i^* 垂直于 C_0^*；

(5) 在平面 Π 上获得两列用“∘”号标志的点，再用光滑曲线连成两条曲线段 l_1 和 l_2；

(6) 曲线段 l_1、l_2 及 C_1^*、…、C_n^* 组成平板的曲边四边形.

习　题　十

1. 试证明：螺旋面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u, v\sin u, u+v\}$ 和旋转单叶双曲面 $\boldsymbol{r}=\{\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{\rho^2-1}\}$ 之间存在着等距映射：
$$\begin{cases}\theta=\operatorname{tg}^{-1}v+u\\ \rho=\sqrt{v^2+1}.\end{cases}$$

2. 试证明：对于具有线素
$$ds^2=\frac{1}{4(u-v^2)}(du^2-4v\,du\,dv+4u\,dv^2)\quad (u>v^2)$$
的曲面，通过映射
$$\begin{cases}u=x^2+y^2\\ v=y\end{cases}$$
可使它和平面成等距对应.

3. 曲面的椭圆点、双曲点、抛物点和脐点，在等距映射下都是不变吗?

4. 试证明下列每对曲面之间不存在等距对应：

(1) 球面；(2) 柱面；(3) 单叶双曲面.

7.2 共形映射

等距映射具备许多良好的性质，因为通过它，我们能够把一张曲面无拉伸、无压缩地变形为另一张曲面。但是，等距映射的条件太强，以致大部分曲面之间不存在等距映射。

我们知道，球面与平面之间不存在等距映射。为了绘制地图，特别是为了绘制海图，需要用到球面到平面的映射，使得球面的两个方向之间的交角能够保持下来，以便于航海之用。本段要介绍的共形映射就是这种映射。

定义 假设曲面 S 和 S^* 间的一个映射(7.4)具备保角的性质，就是说，S 的任意二方向之间的夹角经过这个映射后仍不改变，那末就称它为共形映射。

从(3.7)得知，S 和 S^* 的第一基本量成比例：

$$\left.\begin{aligned} E(u,\ v)=\rho(u,\ v)E^*(u,\ v),\\ F(u,\ v)=\rho(u,\ v)F^*(u,\ v),\\ G(u,\ v)=\rho(u,\ v)G^*(u,\ v), \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

从而

$$ds^2=\rho(u,\ v)ds^{*2}, \tag{7.7}$$

式中，$\rho(u,\ v)>0$。这时我们说：S 和 S^* 是共形的。特别是，当 $\rho(u,\ v)\equiv 1$ 时，共形映射成为等距映射。

定理 任何曲面是与平面共形的。

在此不准备详述这个定理的证明，只是指出它的一个等价定理：

定理 在任何曲面 S 上，必定存在一组参数 $(u,\ v)$，使得它的第一基本形式化为

$$ds^2=\rho(u,\ v)(du^2+dv^2). \tag{7.8}$$

这种参数称为等温参数。

系 任何两张曲面必定是共形的.

先作共形映射使 $S\to$ 平面 Π；再作另一共形映射使 $S^*\to$ 另一平面 Π^*. 最后作 Π 和 Π^* 之间的共形映射，其结果就是所求的共形映射：$S\to S^*$.

至于两平面的共形映射，牵涉到解析函数论，在此从略.

在保角的意义下，可以造出各种适用于不同对象的共形映射，把曲面映射到平面上.

【例 1】 麦卡托投影

半径 a 的球面方程可写成

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi\}\quad\begin{pmatrix}0<\theta<2\pi\\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}$$

第一基本形式是

$$ds^2=a^2(\cos^2\varphi\,d\theta^2+d\varphi^2),$$

式中，φ 曲线和 θ 曲线分别代表球面的经纬线. 把 ds^2 改写成

$$ds^2=a^2\cos^2\varphi\cdot\left\{d\theta^2+\left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right)^2\right\}. \tag{7.9}$$

现在决定下列参数变换

$$\begin{cases}x=\theta\\ y=\ln\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right),\end{cases} \tag{7.10}$$

使得球面的第一基本形式(7.9)变为等温形式

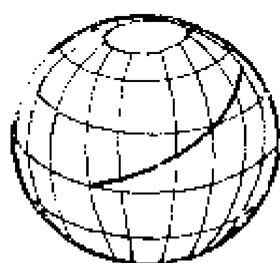
$$ds^2=\rho(x,\ y)(dx^2+dy^2).$$

从(7.10)式得知，整个球面共形映射到 Oxy 平面的带状区域

$$\begin{cases}0<x<2\pi\\ -\infty<y<+\infty\end{cases}$$

中. 这种映射称为麦卡托(Mercator)投影，早期被人们用来

绘制海图. 在这种海图上, 球面上的经线 $\theta=$常数, 是和 Oxy 平面上 y 轴的平行直线对应的; 纬圆 $\varphi=$常数, 是和 x 轴的平行线段对应的.



球面上与经线成等角的曲线称为斜驶线. 因为共形映射是保角的, 斜驶线在 Oxy 平面的对应线是同 y 轴成定角的线段(图 2-66).

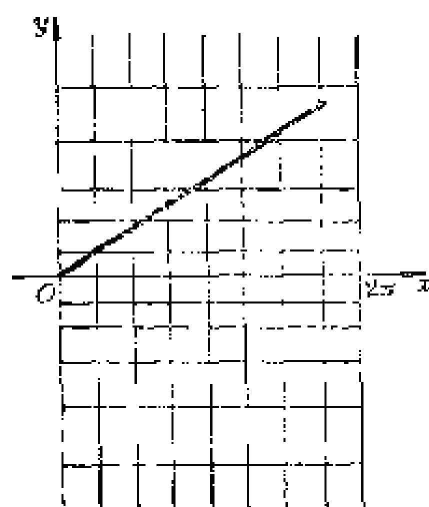


图 2-66

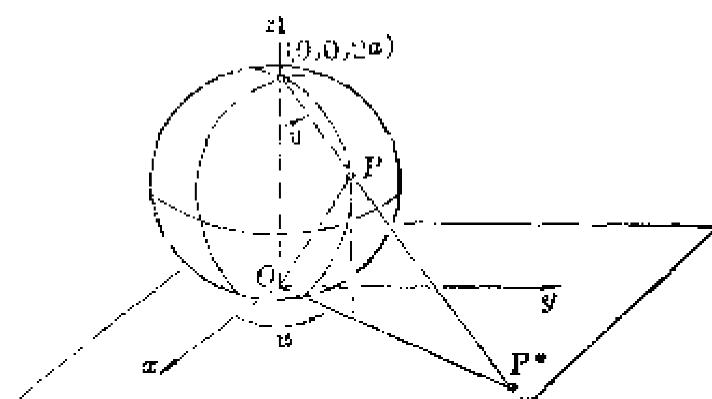


图 2-67

【例 2】 球极投影

球极投影是球面到平面的又一种共形映射.

如图 2-67 所示, 我们从半径为 a 的球面的北极 (0, 0, 2a) 作射线, 使它分别同球面和 Oxy 平面相交于点 P 和 P^*. 映射

$$P \to P^*$$

称为球极投影. 我们用图中的角度 u 和 v 作为表示点 $P(x, y, z)$和 $P^*(x^*, y^*, z^*)$, 并注意到

$$\overline{OP}=2a\sin u, \quad \overline{OP^*}=2a\operatorname{tg} u, \quad \angle POP^*=v,$$

便有

$$
\begin{cases}
x = 2a\sin v\cos v\cos u \\
y = 2a\sin v\cos v\sin u \\
z = 2a\sin^2 v,
\end{cases} \tag{7.11}
$$

和

$$
\begin{cases}
x^* = 2a\,\mathrm{tg}\, v\cos u \\
y^* = 2a\,\mathrm{tg}\, v\sin u \\
z^* = 0.
\end{cases} \tag{7.12}
$$

我们取定 $0<u<2\pi$, $0<v<\frac{\pi}{2}$, 并把(7.11)和(7.12)分别看成球面与平面的参数表示. 于是球面与平面的第一基本形式依次是

$$
ds^2 = 4a^2(\sin^2 v\cos^2 v\,du^2 + dv^2),
$$

$$
ds^{*2} = \frac{4a^2}{\cos^4 v}(\sin^2 v\cos^2 v\,du^2 + dv^2).
$$

由此可见,球极投影是球面到平面的共形映射.

等距映射和共形映射在曲面论中是最重要的. 当然,还有其他映射,如:等积映射(保持对应区域面积不变的映射),测地映射(使两曲面的测地线互相对应的映射),等等. 它们都是等距映射的拓广. 更广泛的要算拓扑映射,即连续映射,它不附带任何其他条件.

7.3 高斯映射

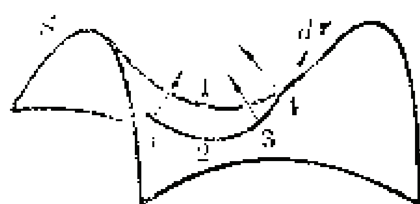
等距映射和共形映射都是两曲面之间的映射. 本段介绍的高斯映射,是曲面到单位球面上的映射,目的是为了研究曲面自身的弯曲情况,特别是为了说明高斯曲率 K 的几何解释.

在曲面 S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ 的每点 $P(u, v)$ 作单位法向量 $\boldsymbol{n}(u, v)$, 并平行移动 $\boldsymbol{n}$ 使它的起点合于原点 O, 那末, $\boldsymbol{n}$ 的

终点被移到以 O 为球心的单位球面 S^2 的一点 P^*. 我们称从 S 到 S^2 的这一映射

$$\mathscr{N}:\ P\to P^*$$

为曲面的高斯映射(图 2-68).



在高斯映射下, S 的象是 S^2 上的一个点集 Σ, 它的方程为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u,v).$$

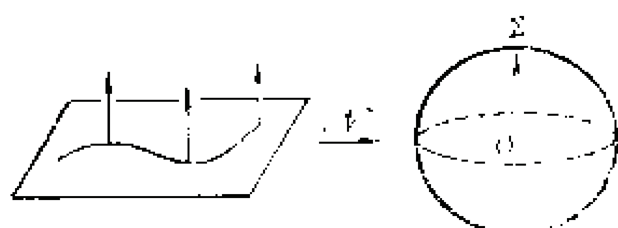
点集 Σ 可能是球面上一个区域, 甚至是一条曲线或一个点(图 2-69).



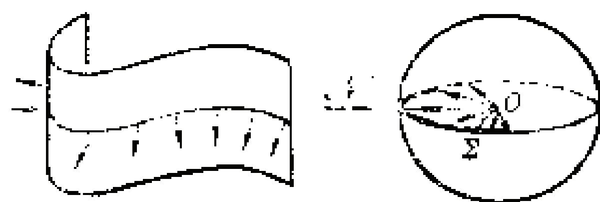
图 2-68

我们称象集 Σ 的线素 $d\boldsymbol{n}^2$ 为曲面 S 的第三基本形式, 并记作

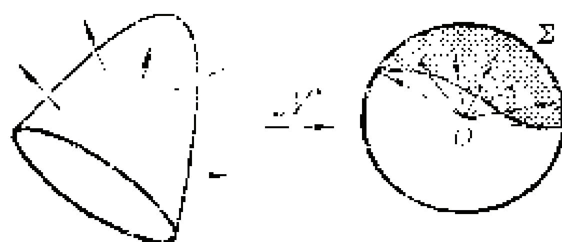
$$\mathrm{III}=d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{n}.$$



(a) 平面



(b) 柱面



(c) 凸曲面

图 2-69

它与 S 的第一和第二基本形式

$$\mathrm{I}=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{II}=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}$$

在形式上有着某种对称性.

定理 曲面 S 的三个基本形式之间存在着关系式

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0, \tag{7.13}$$

其中 K 和 H 分别表示 S 的高斯曲率与平均曲率.

【证】 我们选取 S 的曲率线为参数曲线. 则有罗得里克公式(4.29)即

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_u=-k_1\boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{n}_v=-k_2\boldsymbol{r}_v \end{cases}$$

成立,式中 k_1 和 k_2 分别表示最小和最大主曲率. 由于

$$d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv=-(k_1\boldsymbol{r}_u du+k_2\boldsymbol{r}_v dv),$$

因而有

$$d\boldsymbol{n}+k_1 d\boldsymbol{r}=(k_1-k_2)\boldsymbol{r}_v dv,$$

$$d\boldsymbol{n}+k_2 d\boldsymbol{r}=(k_2-k_1)\boldsymbol{r}_u du.$$

将两式两边分别作点乘, 并注意到曲率线网是正交网: $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0$, 便可导出

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=(d\boldsymbol{n}+k_1 d\boldsymbol{r})\cdot(d\boldsymbol{n}+k_2 d\boldsymbol{r})=0.$$

这就证明了(7.13). ▌

按照高斯映射,还可导出高斯曲率 K 的几何解释.

由曲面论的基本公式(5.14)得出

$$\boldsymbol{n}_u=\sum_k \omega_1^k\boldsymbol{r}_k,\quad \boldsymbol{n}_v=\sum_k \omega_2^k\boldsymbol{r}_k.$$

于是

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v=(\omega_1^1\boldsymbol{r}_u+\omega_1^2\boldsymbol{r}_v)\times(\omega_2^1\boldsymbol{r}_u+\omega_2^2\boldsymbol{r}_v)$$

$$=\det\begin{vmatrix}\omega_1^1 & \omega_1^2\\ \omega_2^1 & \omega_2^2\end{vmatrix}(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v).$$

我们把(5.11)看成二阶矩阵相乘关系, 并求它们的行列式:

$$\det\begin{vmatrix}\omega_1^1 & \omega_1^2\\ \omega_2^1 & \omega_2^2\end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{vmatrix}\cdot\det\begin{vmatrix}g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=K.$$

所以

$$|\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v|=|K|\cdot|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|. \tag{7.14}$$

如果注意到$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv$和$|\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v|dudv$分别是曲面$S$和球面$S^2$的面积元素，那末(7.14)式表明：高斯曲率绝对值$|K|$等于两张曲面的面积元素的比值。按照积分的形式可把这一结论表达得更确切些。

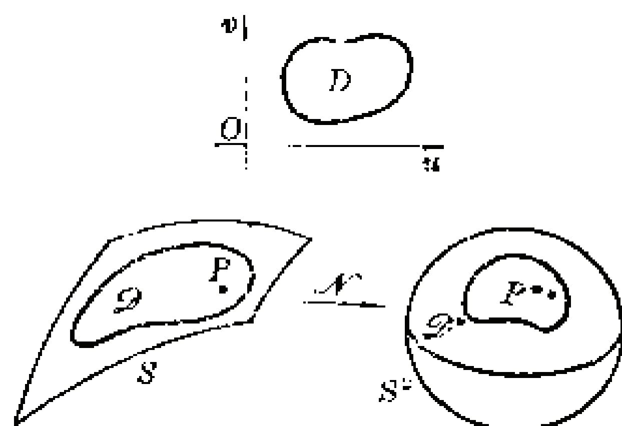


图 2-70

设曲面S中的区域$\mathscr{D}$在高斯映射$\mathscr{N}$下被映射到球面S^2的区域$\mathscr{D}^*$，而且它们的面积分别是A和A^*。$\mathscr{D}$和$\mathscr{D}^*$对应于参数平面的同一区域D(图 2-70)。$P\in\mathscr{D}$，$P^*\in\mathscr{D}^*$，

$$\mathscr{N}:\ P\to P^*.$$

由面积公式得知，

$$A=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv,$$

$$A^*=\iint_D|\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v|dudv=\iint_D|K|\cdot|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv.$$

当区域$\mathscr{D}$逐渐缩小到P点时，利用积分中值定理，得

$$\lim_{\mathscr{D}\to P}\frac{A^*}{A}=\lim_{D\to 0}\frac{\iint_D|K|\cdot|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv}{\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv}=|K(P)|.$$

这就是高斯曲率绝对值的几何意义。这种解释给人们的直观认识以科学的论证。因为当曲面S在P点附近较平坦

时，直观上看来，$\mathscr{D}^*$ 的面积是不大的；反之，当 S 在 P 点附近弯曲较大时，$\mathscr{D}^*$ 占的面积也大.

关于高斯曲率符号的几何意义，这里就从略了.

7.4 小结

1、等距映射

等距映射保持两曲面 S 和 S^* 间对应曲线的长度不变. 若用同一组参数 (u, v) 代表两曲面的对应点的坐标，则等距映射的解析条件是：

$$E=E^*, \quad F=F^*, \quad G=G^*.$$

凡是由第一基本量决定的几何量，包括：弧长、夹角、面积、高斯曲率 K、测地曲率 k_g、测地线等等，在等距映射下都是不变的.

等距映射的几何意义是：曲面 S 经过无伸缩的连续变形后，和曲面 S^* 相贴合.

只有可展曲面能够与平面有等距映射. 这在板金技术中称为"曲面展开".

2. 共形映射

共形映射是保持两曲面 S 和 S^* 的对应曲线间的夹角不变的. 若用同一组参数 (u, v) 代表两曲面的对应点的坐标，那末共形映射的解析条件是：

$$E=\rho E^*, \quad F=\rho F^*, \quad G=\rho G^* \quad (\rho>0).$$

任意两张曲面之间都可建立起共形映射. 球面可以被共形映射到平面. 人们从此得到几种绘制地图的有效方法.

3. 高斯映射

高斯映射是曲面到单位球面上的映射，目的为了研究曲

面自身的弯曲情况. 根据高斯映射得到了高斯曲率绝对值 $|K|$ 的几何解释.

第八节 特 殊 曲 面

8.1 全脐点曲面

我们在 4.2 段定义了曲面的脐点，即：曲面沿其任意切方向的法曲率都相等的点. 其几何意义是，曲面在脐点是沿各个切方向均匀地弯曲的. 解析条件是：在这点 $k_1=k_2$，即 $H^2=K$.

曲面点成为脐点的条件是在这点(4.15)式成立：

$$\Omega_{ij}=\rho g_{ij}\quad (i,\ j=1,\ 2). \tag{8.1}$$

依照比例因子 ρ 是否为零，可将脐点分成平点和圆点两类. 平面上的点都是平点，球面上的点都是圆点(见习题七第 3 题).

当曲面的点都是脐点时，称它为全脐点曲面. 平面和球面都是全脐点曲面. 反过来，我们证明

定理 全脐点曲面必为球面或平面的一部分.

【证】 根据定义，在全脐点曲面上条件(8.1)成立：

$$\Omega_{ij}(u,\ v)=\rho(u,\ v)g_{ij}(u,\ v)\quad (i,\ j=1,\ 2). \tag{8.2}$$

根据曲面论的基本公式(5.14)，我们得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_i &= -\sum_{j,k}\Omega_{ij}g^{jk}\boldsymbol{r}_k=-\sum_{j,k}\rho g_{ij}g^{jk}\boldsymbol{r}_k \\ &= -\rho\boldsymbol{r}_i\quad (i=1,\ 2). \end{aligned} \tag{8.3}$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 是光滑函数，

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_i}{\partial u^j}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial u^j\partial u^i}=\frac{\partial \boldsymbol{n}_j}{\partial u^i},$$

从而

$$(-\rho\boldsymbol{r}_i)_j=(-\rho\boldsymbol{r}_j)_i,$$

即 $$\frac{\partial\rho}{\partial u^j}\boldsymbol{r}_i=\frac{\partial\rho}{\partial u^i}\boldsymbol{r}_j\quad(i,\ j=1,\ 2).$$

特别取 $i=2,\ j=1$,

$$\frac{\partial\rho}{\partial u^1}\boldsymbol{r}_2=\frac{\partial\rho}{\partial u^2}\boldsymbol{r}_1.$$

可是 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 是线性无关的，所以

$$\frac{\partial\rho}{\partial u^1}=\frac{\partial\rho}{\partial u^2}=0.$$

因此， $$\rho(u^1,\ u^2)=\text{常数}\ \rho_0.$$

当 $\rho_0=0$ 时，由(8.3)式,

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2=0,$$

故 $$\boldsymbol{n}=\text{常向量}\ \boldsymbol{n}_0.$$

所以曲面变为平面.

当 $\rho_0\neq0$ 时，由(8.3)式,

$$d(\boldsymbol{n}+\rho_0\boldsymbol{r})=d\boldsymbol{n}+\rho_0 d\boldsymbol{r}=\sum_i\boldsymbol{n}_i du^i+\sum_i\rho\boldsymbol{r}_i du^i=0.$$

积分得 $$\boldsymbol{n}+\rho_0\boldsymbol{r}=\text{常向量}\ \boldsymbol{a}.$$

从而 $$\left|\boldsymbol{r}-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{a}\right|=\frac{1}{|\rho_0|}.$$

这表明曲面是以 $\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{a}$ 为球心、$\frac{1}{|\rho_0|}$ 为半径的球面. ▌

8.2 极小曲面

定义 平均曲率 $H=0$ 的曲面称为极小曲面.

如下文所示，这类曲面之所以称为“极小”，是由于它在变分学上具有极小面积.

设曲面的表示式为

$$S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),\quad (u,\ v)\in D,$$

$\boldsymbol{n}(u,\ v)$ 为曲面的单位法向量. 取一个定义在 D 上的任意数

量函数 $h(u, v)$，并作曲面族

$$S^t:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^t(u, v)\equiv\boldsymbol{r}(u, v)+t\cdot h(u, v)\boldsymbol{n}(u, v), \tag{8.4}$$

式中 t 是参数．当 $t=0$ 时，S^0 就是曲面 S．我们让 t 在 0 附近变动，则对应的曲面 S^t 也就是在曲面 S 附近变动的“邻近曲面”(图 2-71)．

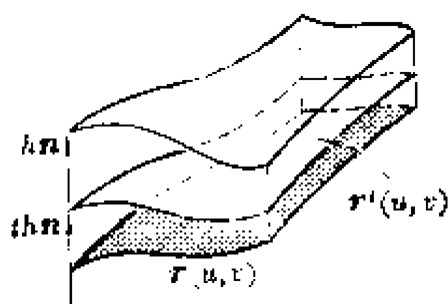


图 2-71

为了考察曲面 S^t 的面积，我们先计算第一基本量．从

$$\boldsymbol{r}_u^t=\boldsymbol{r}_u+th\boldsymbol{n}_u+th_u\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{r}_v^t=\boldsymbol{r}_v+th\boldsymbol{n}_v+th_v\boldsymbol{n},$$

得出

$$\begin{aligned}E^t&=\boldsymbol{r}_u^t\cdot\boldsymbol{r}_u^t=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u+2th(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u)+t^2h^2\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u+t^2h_u^2\\&=E-2thL+O(t^2),\\F^t&=\boldsymbol{r}_u^t\cdot\boldsymbol{r}_v^t=F-2thM+O(t^2),\\G^t&=\boldsymbol{r}_v^t\cdot\boldsymbol{r}_v^t=G-2thN+O(t^2),\end{aligned}$$

式中 $O(t^2)$ 代表关于 t 至少是二阶的微小数量．

曲面 S 的平均曲率是

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)},$$

所以

$$\begin{aligned}E^tG^t-(F^t)^2&=EG-F^2-2th(LG-2MF+NE)+O(t^2)\\&=(EG-F^2)(1-4thH)+O(t^2).\end{aligned}$$

于是曲面 S^t 的面积可表成

$$\begin{aligned}A(t)&=\iint_D\sqrt{E^tG^t-(F^t)^2}\,du\,dv\\&=\iint_D\sqrt{1-4thH+O(t^2)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,\end{aligned}$$

是带参变量 t 的积分. 两边对 t 求导,并取 $t=0$, 得到

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}=\iint_D \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-4thH+O(t^2)}\right)\Big|_{t=0}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$=-\iint_D 2hH\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{8.5}$$

在此基础上,容易证明

定理 S 为极小曲面的充要条件是: S 的面积达到逗留值,即 $A'(0)=0$.

【证】 必要性是明显的; 只需证明充分性:

假设 $A'(0)=0$, 而 H 在 D 的某点(u_0, v_0)处不是零. 我们不妨假定 $H(u_0, v_0)>0$. 由于 H 是连续函数, D 中必有点(u_0, v_0)的小邻域 $\mathcal{N}$, 使得在其中 $H>0$. 我们构造这样的一个函数 h, 使得在 D 上 $h\geqslant 0$, $h(u_0, v_0)>0$, 在 $\mathcal{N}$ 外 $h=0$. 对于这样的 $h(u, v)$, (8.5) 式的右端小于 0, 这与 $A'(0)=0$ 矛盾. 证毕. 】

两点说明:

(1) 如果曲面 S 的面积同它的"邻近曲面" S^t 相比较都要小,那末 $A'(0)=0$, 从而 $H=0$. 因此, S 称为极小曲面.

(2) 条件 $A'(0)=0$ 并不意味着曲面 S 的面积必定极小, 所以在定理中称为"逗留值", 而不叫"极值". 进一步的讨论涉及到 $A''(0)$的符号,这里从略.

极小曲面的物理现象是肥皂膜问题. 我们将一段封闭铁丝 C 浸入肥皂液后取出来, 会有肥皂膜曲面附在 C 上, 并以铁丝 C 为边界. 肥皂液的表面张力使得皂膜曲面面积缩到极小,于是 $H=0$, 该膜面便是极小曲面.

若铁丝 C 是平面闭曲线, 那末张在 C 上的皂膜必定是平面. 平面是平凡的极小曲面.

我们将 C 弯成适当复杂的闭曲线，便能利用皂液“制造”出漂亮的极小曲面(见图 2-72、2-73 及 2-74).

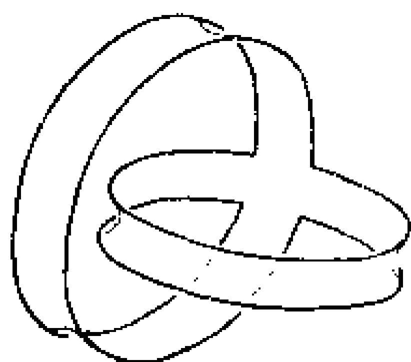


图 2-72

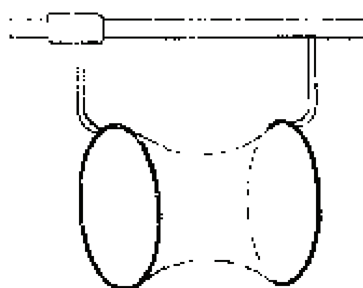


图 2-73

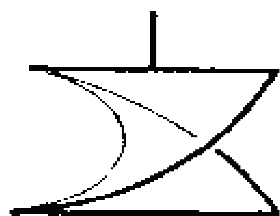


图 2-74

取一对相同的圆形铁丝，重叠起来浸入皂液. 取出后小心地分开，并且时时保持圆圈平面垂直于两圆的连心线. 根据对称性，皂膜曲面一定是旋转面. 如下文的例所示，极小曲面如果是旋转面，它必定是悬链面. 因此，图 2-73 所示的皂膜曲面是悬链面.

由习题七第 7 题得知，悬链面和正螺面都是极小曲面. 用两段圆柱螺线和两直线段连成一封闭曲线，并把它浸入皂液中，张成的皂膜曲面就是正螺面(图 2-74).

【例】 若旋转面 S 是极小曲面，则 S 必是悬链面.

实际上，设旋转面的方程为

$$S:\ \boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ v\}.$$

S 的第一和第二基本量如下:

$$E=f^2,\quad F=0,\quad G=1+(f')^2;$$

$$L=\frac{-f}{\sqrt{1+(f')^2}},\quad N=\frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}}.$$

把这些式子代入 $H=\dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=0$, 得

$$LG-2MF+NE=0,$$

便有
$$1+(f')^2=ff''.$$
为了求解这个二阶常微分方程式，先将它改写成
$$\frac{f'}{f}=\frac{f'f''}{1+(f')^2}.$$
两边积分后得
$$f=c\sqrt{1+(f')^2},$$
其中 c 是正的积分常数．于是
$$\frac{df}{dv}=\pm\sqrt{\left(\frac{f}{c}\right)^2-1}.$$
再次积分得到
$$f=c\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}+b\right),$$
b 是另一积分常数．这表明 S 是悬链面．

从上面我们看到了，平面、悬链面、正螺面都是极小曲面．它们或者是抛物的($K=0$)，或者是双曲的($K<0$)．一般地，极小曲面上不存在椭圆点，即 $K\leq 0$．事实上，从 $H=0$，主曲率 $k_2=-k_1$，因此高斯曲率 $K=k_1k_2=-k_1^2\leq 0$．

习 题 十 一

1．高斯曲率 $K=0$ 的旋转曲面是怎样的曲面？
2．设劈锥曲面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ \varphi(u)\}$ 为极小曲面，试证它必定是正螺面．
3．试证明下列曲面是极小曲面：
   (1) Scherk 曲面：$z=\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{\cos ay}{\cos ax}$　(a 是常数)；
   (2) Enneper 曲面：
   $$\boldsymbol{r}=\{3u(1+v^2)-u^3,\ 3v(1+u^2)-v^3,\ 3(u^2-v^2)\}.$$

8.3 常曲率曲面

定义　高斯曲率 $K=$常数的曲面，称为**常曲率曲面**．

我们先研究 $K=0$ 的曲面，决定这类零曲率曲面的具体形态．接着讨论正的和负的常曲率曲面，按照第一基本形式作出曲面的内在几何意义下的分类．

定理 1 高斯曲率 $K=0$ 的曲面是可展曲面．

【证】 假定 $K=0$．我们采取 S 的曲率线(u, v)作为参数曲线，则 $F=0$，$M=0$．因此，$LN=0$．不妨假定 $L=0$．

按照曲面在正交网下的基本公式(5.16)得出

$$\boldsymbol{n}_1=-\frac{L}{E}\boldsymbol{r}_1-\frac{M}{G}\boldsymbol{r}_2=0,$$

就是说，曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与参数 u 无关：$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(v)$．这表明 S 的切平面族仅仅依赖于单参数 v，从而 S 可看成单参数平面族的包络，所以是可展曲面．】

定理 2 设两曲面 S 和 S^* 具有同一常数的高斯曲率 K，则它们是等距的，且其第一基本形式按照 $K=0$、>0 或 <0 而分成三种形式：

(1) 当 $K=0$ 时，

$$ds^2=du^2+dv^2; \tag{8.6}$$

(2) 当 $K=\frac{1}{a^2}>0$ 时，

$$ds^2=du^2+\cos^2\frac{u}{a}dv^2; \tag{8.7}$$

(3) 当 $K=-\frac{1}{a^2}<0$ 时，

$$ds^2=du^2+\mathrm{ch}^2\frac{u}{a}dv^2. \tag{8.8}$$

【证】 在曲面上选择测地坐标系(u, v)时，曲面的第一基本形式可写成(见(6.30)，(6.31))：

$$ds^2=du^2+G(u, v)dv^2, \tag{8.9}$$

$$G(0, v)=1, \quad G_u(0, v)=0. \tag{8.10}$$

这时，$E=1$，$F=0$. 由高斯方程(5.25)得知

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu},$$

或写成

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}+K\sqrt{G}=0. \tag{8.11}$$

(1) 当 $K=0$ 时，从

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=0$$

得出 $$\sqrt{G}=A(v)+uB(v).$$

可是这时(8.10)变为 $A(v)=1$, $B(v)=0$, 所以 $G=1$.

(2) 当 $K=\frac{1}{a^2}>0$ 时，从(8.11)得出

$$\sqrt{G(u, v)}=A(v)\cos\frac{u}{a}+B(v)\sin\frac{u}{a}.$$

这时，(8.10)变为 $A(v)=1$, $B(v)=0$. 因此，$G=\cos^2\frac{u}{a}$.

(3) 当 $K=-\frac{1}{a^2}<0$ 时，从(8.11)得出

$$\sqrt{G(u, v)}=A(v)\operatorname{ch}\frac{u}{a}+B(v)\operatorname{sh}\frac{u}{a}.$$

这时(8.10)变为 $A(v)=1$, $B(v)=0$. 因此，$G=\operatorname{ch}^2\frac{u}{a}$. 证毕. ▌

当曲面 S 和平面成等距对应时，其实际意义如下：曲面 S 经过变形之后，既不撕裂，又无皱叠地被展成为平面. 或者说，平面经过无伸缩的弯曲变形，可使它和曲面 S 相贴合.

我们已经完全决定了可展曲面，它就是柱面或是锥面或是切线面.

对于正的或负的常曲率曲面完全确定其形状是有困难的. 然而, 人们更加关心的是这类曲面的第一基本形式, 即常曲率曲面的内在几何性质.

从内在几何角度看, 凡等距的曲面都看成相同的曲面, 我们可以选择其中一张曲面作为等距曲面类的代表. 根据定理 2, 常曲率曲面按照高斯曲率 K 的符号分成三类: 第一类 $K=0$, 代表的曲面是平面; 第二类 $K=\frac{1}{a^2}$, 代表的曲面是半径为 a 的球面; 第三类 $K=-\frac{1}{a^2}$, 代表的曲面还不明显. 下面就讨论这个问题.

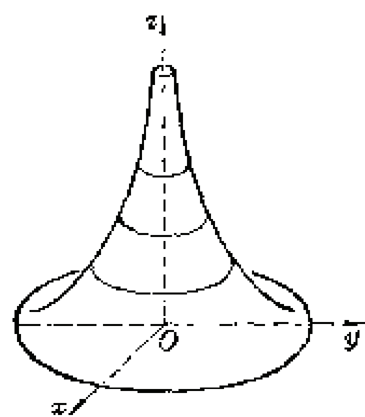


图 2-75

为此, 在 Oyz 平面上取曳物线

$$\begin{cases} y=a\sin v, \\ z=-a\left(\cos v+\ln \operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\right), \end{cases} \quad \left(0<v<\frac{\pi}{2}\right)$$

作为母线, 而且把它绕 z 轴旋转, 使之生成一个旋转面, 即伪球面(图 2-75).

实际上, 伪球面的方程可写成

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\sin v\cos u,\ a\sin v\sin u,\ -a\left(\cos v+\ln \operatorname{tg}\frac{v}{2}\right)\right\}$$

$$\left(0<v<\frac{\pi}{2},\quad 0<u<2\pi\right).$$

第一基本量为

$$E=a^2\sin^2 v,\quad F=0,\quad G=a^2\operatorname{ctg}^2 v.$$

按照公式(5.25)求得伪球面的高斯曲率

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}=-\frac{1}{a^2}.$$

所以伪球面是常曲率的曲面. 这样便得到

定理 3 在内在几何意义下,常曲率曲面仅包括平面、球面和伪球面三种.

*8.4 非欧几何

通过上段的三个定理已作出了常曲率曲面的分类. 其中平面和球面是熟知的. 现在应用伪球面到平面的共形映射来研究伪球面上的几何,特别是给出其测地线的表示. 最后指出伪球面几何同非欧几何有着密切的关系.

(1) 伪球面和庞加莱半平面 如上段所示, $K=-\frac{1}{a^2}$ 的伪球面的第一基本形式可写成

$$ds^2=a^2\sin^2 v\,du^2+a^2\operatorname{ctg}^2 v\cdot dv^2. \tag{8.12}$$

作参数变换

$$\begin{cases} x=au, \\ y=\dfrac{a}{\sin v}, \end{cases} \tag{8.13}$$

使伪球面的点(u, v)与Oxy平面的上半平面$(y>0)$的点(x, y)相对应. 这样一来,从微分关系式

$$dx=a\,du,\quad dy=-\frac{a\cos v}{\sin^2 v}\,dv$$

解出du、dv,并代入(8.12),便可改写(8.12)为下列形式:

$$ds^2=\frac{a^2}{y^2}(dx^2+dy^2)\quad (y>0). \tag{8.14}$$

这表明,x和y是伪球面的等温参数,而(8.13)确定了一个从伪球面到欧氏上半平面$(y>0)$的共形映射.

我们在上半平面导入按照(8.14)式表示的ds^2作为它的第一基本形式,而且称它为庞加莱(Poincaré)半平面,记为R_+^2. 这样的内在几何同欧氏平面几何完全不一样. 我们通过(8.13)这一等距映射可把伪球面的测地线映射到庞加莱半平面R_+^2上的测地线. 而且R_+^2的内在几

何恰恰成了伪球面上的内在几何的表示.

如 6.2 段的例 4 所示，R^2_+ 上的测地线是中心位于 x 轴上的半圆. 另一方面，通过 R^2_+ 上的任意两点可引这样一个半圆，所以 R^2_+ 上的任意两点决定一条测地线. 从 R^2_+ 的第一基本形式(8.14)又可看出，x 轴($y=0$)代表 R^2_+ 的无穷远直线. 因而所有测地线的两端都是“无限延伸”的.

(2) 非欧几何　读者学过的平面几何称为欧几里德几何，简称欧氏几何. 其中有一个著名的平行公理：过直线 l 外的一已知点，可引一条且仅仅一条直线与 l 平行. 这个公理在 R^2_+ 的内在几何里不成立. 这是因为，人们在 R^2_+ 上可以引两条平行线. 详细地说，我们把伪球面的测地线看作“直线”，也就是说，将庞加莱半平面 R^2_+ 上作为测地线的半圆看作“直线”. 可以验证，在这样解释下的几何里，上述的平行公理不成立.

事实上，如图 2-76 所示，对于 R^2_+ 上的任意一条“直线” l，过 l 外的一点 P，可以作 l 的两条平行线和无穷多条与 l 不相交的“直线”.

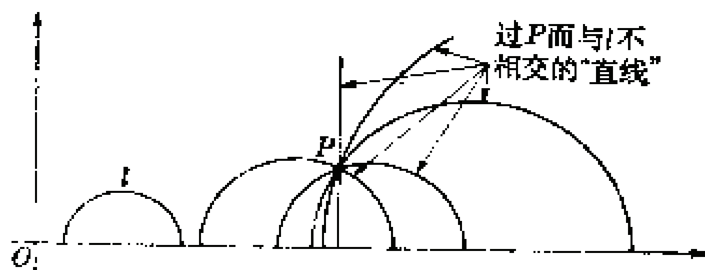


图 2-76

在欧氏几何里，一个三角形的三内角之和等于 π. 在这个定理的证明中，我们用到了欧氏几何中的平行公理. 现在在 R^2_+ 上，平行公理不成立了，那末，一个“三角形”的三内角之和等于多少? 从 6.4 段所述的高斯-保纳公式可以看出，这个和小于 π. 那末，它同 π 之差等于多少呢? 希望读者自己作出结论来.

十九世纪初，高斯、罗巴切夫斯基、鲍约独立地创造了非欧几何. 以上所述，恰恰表明了非欧几何在伪球面上的实现. 这是贝尔特拉米(1968)的贡献.

8.5 小结

本节介绍三种特殊曲面：全脐点曲面、极小曲面、常曲率

曲面．其中，负常曲率曲面同非欧几何有密切的关系．

1．全脐点曲面

(1) 定义：第一和第二基本量处处成比例的曲面：

$$\Omega_{ij}=\rho g_{ij} \quad (i, j=1, 2).$$

(2) 解析特征：$H^2=K$.

(3) 几何特征：平面($\rho=0$)或球面($\rho\neq0$)。

2．极小曲面

(1) 定义：$H=0$ 的曲面．

(2) 几何特征：面积达到逗留值．

(3) 物理现象：肥皂膜．

3．常曲率曲面

(1) 定义：$K=$常数的曲面．

(2) 分类：在内在几何意义下，常曲率曲面分成三类：

(i) $K=0$，平面；

(ii) $K=\frac{1}{a^2}>0$，半径为 a 的球面；

(iii) $K=-\frac{1}{a^2}$，伪球面．

零曲率曲面是可展曲面，它是柱面、锥面或者切线面．

*4．非欧几何

常曲率曲面提供欧氏和非欧几何的模型．

(1) 平面：在欧氏几何中，过直线 l 外一点，可引一条且仅仅一条与 l 平行的直线．三角形的三内角之和等于 π．

(2) 伪球面：在双曲的非欧几何中，过"直线" l 外一点，可引两条与 l 平行的"直线"和无限多条与 l 不相交的"直线"．"三角形"的三内角之和小于 π．

附录 卵形线

这本微分几何仅仅涉及图形的局部性质. 图形的局部性质同整体性质是有联系的. 现在,我们以卵形线为例,向读者介绍曲线整体性质的若干初等概念和方法.

本节讨论的图形仅限于平面曲线.

在平面上, 与任一直线的交点不超过两点的闭曲线称为**卵形线**,又称凸闭曲线.

在卵形线上的曲率 $k_r(s)$ 取极值的点称为**顶点**. 在顶点处, $\frac{dk_r}{ds}=0$.

1. **四顶点定理** 卵形线上至少存在四个顶点.

【证】 设卵形线的周长为 L, 曲率 $k_r(s)$是定义在闭区间$[0, L]$上的连续函数, 因此至少存在一个极大值和一个极小值, 而且极大值和极小值交替着出现, 所以顶点个数必定是偶数. 于是只须证明:不存在只有两个顶点的卵形线.

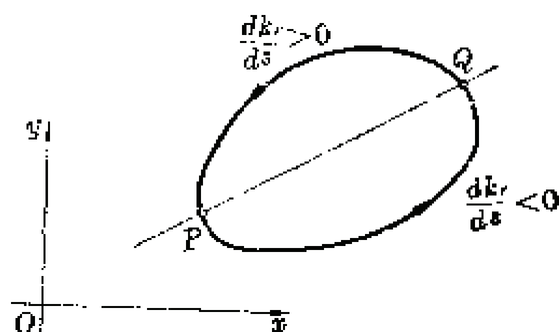


图 1

用反证法: 若卵形线上只有两个顶点 P 和 Q, 对应的曲率 $k_r(s)$ 分别取到极大值和极小值. 设直线 PQ 的方程为

$$ax+by+c=0 \quad (a、b、c \text{ 常数}).$$

根据卵形线的定义, 直线 PQ 将卵形线分成 $\overset{\frown}{QP}$ 与 $\overset{\frown}{PQ}$

两部分(箭头指向见图 1). 设 $\overset{\frown}{QP}$ 上的点在直线 PQ 的正侧，使得 $ax+by+c>0$. $\overset{\frown}{PQ}$ 上的点使得 $ax+by+c<0$. 而且曲率 k_r 从 Q 到 P 单调上升；从 P 到 Q 单调下降. 因此沿 $\overset{\frown}{QP}$, $\dfrac{dk_r}{ds}>0$; 沿 $\overset{\frown}{PQ}$, $\dfrac{dk_r}{ds}<0$.

这样一来,在除了 P、Q 两点以外的整条卵形线上

$$(ax+by+c)\frac{dk_r}{ds}>0,$$

从而,沿卵形线积分

$$\oint(ax+by+c)\frac{dk_r}{ds}ds>0. \tag{1}$$

可是,根据平面曲线的弗雷耐公式,

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-k_r\frac{dy}{ds},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=k_r\frac{dx}{ds},$$

所以

$$\oint x\frac{dk_r}{ds}ds=xk_r\Big|_0^L-\oint k_r\frac{dx}{ds}ds$$
$$=-\oint\frac{d^2y}{ds^2}ds=-\frac{dy}{ds}\Big|_0^L=0;$$
$$\oint y\frac{dk_r}{ds}ds=yk_r\Big|_0^L-\oint k_r\frac{dy}{ds}ds$$
$$=\oint\frac{d^2x}{ds^2}ds=\frac{dx}{ds}\Big|_0^L=0;$$
$$\oint\frac{dk_r}{ds}ds=k_r\Big|_0^L=0.$$

因此,对于任意常数 a、b、c,

$$\oint(ax+by+c)\frac{dk_r}{ds}ds=0,$$

这与不等式(1)矛盾. 证毕. ▌

椭圆仅有 4 个顶点，即曲线与长、短二轴的交点(见习题). 可见,卵形线的顶点的最少个数恰等于 4.

2．支持函数

我们规定卵形线 C 上弧长增加的方向为逆时针方向．在 C 上任何一点 $P(x, y)$ 作切线，并从原点 O 引此切线的垂线．设此垂线长为 p，x 轴与垂线的夹角为有向角 θ（图 2），p 是关于 θ 周期为 2π 的函数，即

$$p=p(\theta), \tag{2}$$

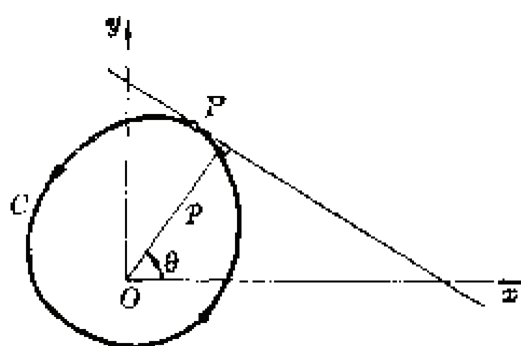


图 2

且切线方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p(\theta)=0. \tag{3}$$

已知曲线 C 时，容易求出切线方程(3)．反之，给定了函数 $p=p(\theta)$，也可决定 C 的方程．这时，我们把卵形线 C 看成切线族(3)的包络．按照第一章 6.4 段的包络线方程(6.29)，从(3)解得卵形线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x=p(\theta)\cos\theta-p'(\theta)\sin\theta, \\ y=p(\theta)\sin\theta-p'(\theta)\cos\theta. \end{cases} \tag{4}$$

关于 θ 微分(4)的第一式：

$$\frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\theta}=-(p+p'')\sin\theta,$$

s 是 C 的弧长参数．注意到 $\frac{dx}{ds}$ 是 C 在 P 点的单位切向量的第一分量，

$$\frac{dx}{ds}=-\sin\theta.$$

于是，C 在 P 点的平面曲率为

$$k_r=\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{p+p''}.$$

曲率半径为

$$R_r=p+p''.$$

根据卵形线的性质，$k_r>0$（这里我们不加证明），从而得

$$p+p''>0. \tag{5}$$

综上所述，我们能够利用满足条件(5)的周期函数(2)来表示一条卵形线。满足条件 $p+p''>0$ 且周期为 2π 的函数 $p=p(\theta)$ 称为卵形线的**支持函数**。

按照支持函数 $p=p(\theta)$ 表示的卵形线 C，其周长 L 和面积 F 有简单的计算公式：

$$\begin{aligned}
L&=\int_C ds=\int_0^{2\pi}(p+p'')d\theta=\int_0^{2\pi}p\,d\theta,\\
F&=\int_C dF=\frac{1}{2}\int_C p\,ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(p+p'')d\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)d\theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

在上述推导过程中，需要注意到 $p(\theta)$ 以 2π 为周期：

$$p(0)=p(2\pi),\quad p'(0)=p'(2\pi),$$

以及 C 的弧长元为

$$ds=(p+p'')d\theta,$$

C 的面积元（图 3 中阴影三角形）为

$$dF=\frac{1}{2}p\,ds.$$

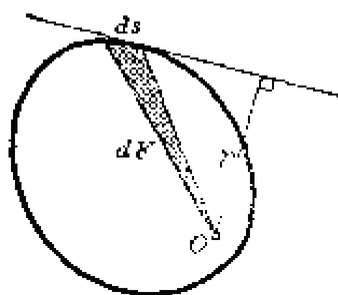


图 3

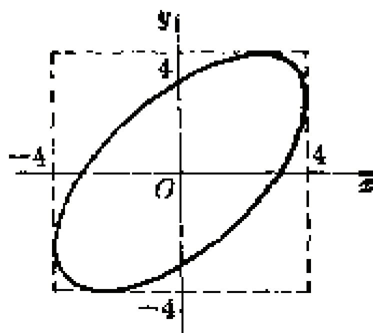


图 4

【例 1】 已知支持函数 $p=4+\sin 2\theta$，求卵形线 C 及其周长 L 和面积 F。

解：首先计算

$$p'=2\cos 2\theta,\quad p''=-4\sin 2\theta,$$

曲率半径 $\qquad R_r=p+p''=4-3\sin 2\theta>0.$

其次，将 p 和 p' 代入(4)式，得到卵形线 C 的参数方程(图 4)为

$$\begin{cases} x=2(2\cos\theta+\sin^3\theta) \\ y=2(2\sin\theta+\cos^3\theta). \end{cases}$$

周长为 $\qquad L=\int_0^{2\pi} p\,d\theta=8\pi,$

面积为 $\qquad F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)\,d\theta=\frac{29}{2}\pi.$

3. 常宽曲线

卵形线上一对平行切线 l_θ 与 $l_{\theta+\pi}$ 之间的距离称为 C 在 θ 方向的宽度，记为 $W(\theta)$. 从图 5 易见

$$W(\theta)=p(\theta)+p(\theta+\pi).$$

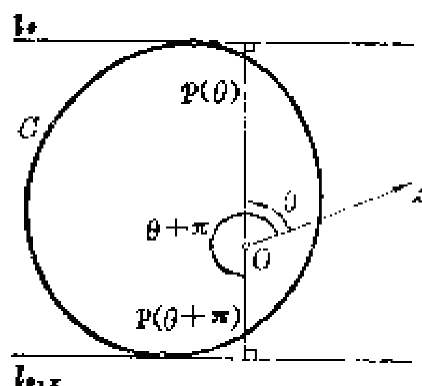


图 5

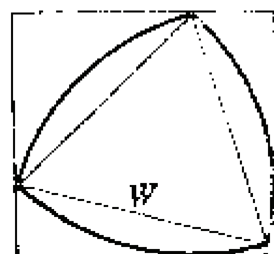


图 6

我们称宽度 W 为常数的卵形线为常宽曲线.

圆是常宽曲线. 除了圆，最简单而又著名的常宽曲线是列洛(Reuleax)三角形：由三段圆弧组成，每段圆弧的中心与端点分别与一个等边三角形的顶点重合. 制造一把截面为列洛三角形的铣刀，便能铣出一个方孔(图 6). 列洛三角形的另一重要应用是作为旋转式发动机的三角活塞型线.

按照周长公式(6),常宽曲线的周长

$$L=\int_0^{2\pi}p(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[p(\theta)+p(\theta+\pi)]d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}W\,d\theta=W\pi.$$

习　　题

1. 证明椭圆 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ b\sin\theta\}(0\leqslant\theta\leqslant2\pi;\ a\neq b)$ 恰有 4 个顶点:$(\pm a,\ 0)$和$(0,\ \pm b)$.
2. 设 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是卵形线,称
$$C^*:\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)-a\boldsymbol{N}_r(s)\quad(a>0)$$
为 C 的外等距曲线(图 7). 记号 L、F、$p(\theta)$、$R_r(\theta)$ 依次代表卵形线 C 的周长、面积、支持函数和曲率半径. 上列记号标以 * 号后,表示曲线 C^* 的相应的量. 试证明:

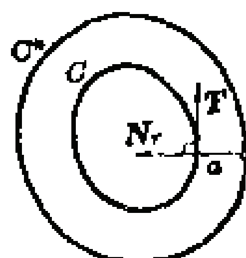


图 7

(1) $p^*(\theta)=p(\theta)+a$;
(2) C^* 是卵形线;
(3) $R_r^*(\theta)=R_r(\theta)+a$;
(4) $L^*=L+2\pi a$;
(5) $F^*=F+aL+\pi a^2$;
(6) C 与 C^* 之间所围的面积 $\Delta F=\frac{1}{2}(L+L^*)a$.

3. 试证明:常宽曲线 C 的外等距曲线 C^* 也是常宽曲线.

习 题 答 案

第 一 章

习题一 **2**. (1) $y=x^2$, 抛物线; (2) $(x-3)(y-1)=-4$, 双曲线; (3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 椭圆; (4) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, 双曲线. **3**. (3) $\boldsymbol{r}=\{a+k\cos\theta,\ a\operatorname{tg}\theta+k\sin\theta\}$. **4** (1) $\boldsymbol{r}=\{\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1-\cos\theta-\sin\theta\}$; (2) $\boldsymbol{r}=\left\{1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2\sin\frac{\theta}{2}\right\}$ $(-2\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi)$.

习题二 **4**. 提示: 首先证明, 当$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)=0$时等式成立; 其次证明, 当$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)\neq0$时, 三向量$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$不共面, 从而将$\boldsymbol{a}$表成$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\mu\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1+\nu\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$, 再决定系数$\lambda$、$\mu$、$\nu$.

习题三 **6**. (1) 成立; (2) 不成立; (3) 成立. **7**. (1) 数量, $2\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$; (2) 数量, $2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}$; (3) 向量, $\dot{\boldsymbol{r}}\times\dddot{\boldsymbol{r}}$; (4) 数量, $(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \boldsymbol{r}^{(4)})$; (5) 向量, $(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{r}^{(4)}+(\dot{\boldsymbol{r}}\times\dddot{\boldsymbol{r}})\times\dddot{\boldsymbol{r}}$; (6) 数量, $\frac{\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}|}$; (7) 数量, $\frac{(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\cdot(\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}})}{|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|}$. 9. $\boldsymbol{r}(t)=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})+2\boldsymbol{j}t+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\right)t^2+\cdots$.

13. (1) $\boldsymbol{r}=\left\{t^3-t+C_1,\ \frac{1}{2}t^4+C_2,\ \cos t+C_3\right\}$ (C_1, C_2, C_3 为积分常数); (2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0e^{at}$ ($\boldsymbol{r}_0$ 为积分常向量); (3) $\boldsymbol{r}=\frac{1}{12}\boldsymbol{a}t^4+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}t^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{C}t^2+\boldsymbol{C}_1t+\boldsymbol{C}_2$ ($\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ 为积分常向量); (4) 当 $a=0$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{B}$; 当 $a>0$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\cos\sqrt{a}\,t+\boldsymbol{B}\sin\sqrt{a}\,t$; 当 $a<0$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\operatorname{ch}\sqrt{-a}t+\boldsymbol{B}\operatorname{sh}\sqrt{-a}t$; ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为积分常向量).

14. $\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{A}\cos kt+\boldsymbol{B}\sin kt\\ \boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{A}\sin kt+\boldsymbol{B}\cos kt\end{cases}$ ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为积分常向量).

习题四 **1**. $\theta=\frac{4n}{5}\pi$ $(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$. **2**. 提示: 作参数变换 $\theta=e^t$. **3**. (1) $\sqrt{3}(e-1)$; (2) $3\sqrt{2}\operatorname{sh}2\pi$; (2) $a\operatorname{sh}\frac{T}{a}$.

4. (1) $S=\int_a^b\sqrt{1+f'^2}\,dx$; (2) $S=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$. 5. (1) $\ln 3-\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}(e^{a\varphi_0}-1)$. 6. 提示：证明 $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=1$.

7. (1) $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi}=a\operatorname{ctg}\varphi\{\sin\varphi,\ -\cos\varphi\}$; (2) $-a\ln\sin\varphi_0$.

习题五 1. $s=\sqrt{2}\,a\operatorname{sh}t$, $k=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$, $\tau=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

2. (1) $k=\frac{\left(1+4\sin^4\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+4\sin^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}}$, $\tau=\frac{-1}{1+4\sin^4\frac{t}{2}}$.

(2) $k=\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\tau=\frac{2}{3}e^{-t}$.

(3) $k=\frac{2(9t^4+9t^2+1)^{1/2}}{(9t^4+4t^2+1)^{3/2}}$, $\tau=\frac{3}{9t^4+9t^2+1}$.

3. (1) $\boldsymbol{T}=\left\{-\frac{5}{13}\sin s,\ -\cos s,\ \frac{12}{13}\sin s\right\}$,

$\boldsymbol{N}=\left\{-\frac{5}{13}\cos s,\ \sin s,\ \frac{12}{13}\cos s\right\}$, $\boldsymbol{B}=\left\{-\frac{12}{13},\ 0,\ -\frac{5}{13}\right\}$, $k=1$, $\tau=0$;

(2) $\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{s}{\sqrt{1+s^2}},\ 2,\ \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right\}$, $\boldsymbol{N}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+s^2}},\ 0,\ \frac{-s}{\sqrt{1+s^2}}\right\}$,

$\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{-2s}{\sqrt{1+s^2}},\ 1,\ \frac{-2}{\sqrt{1+s^2}}\right\}$, $k=\frac{1}{\sqrt{5}(1+s^2)}$, $\tau=\frac{2}{\sqrt{5}(1+s^2)}$.

5. (3) $\varphi\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}$. 两边对 t 求三阶导数，注意到 $\varphi'''=0$，便有 $\boldsymbol{r}'''=\frac{-3}{\varphi}(\varphi''\boldsymbol{r}'+\varphi'\boldsymbol{r}'')$，因此 $(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')=0$. 6. $f(t)=A\sin t+B\cos t+C$ (A, B, C 为常数). 7. (1) $b=0$ 时，k 极大；(2) $b=a$ 时，τ 极大. 8. $k=\frac{aa'}{a^2+b^2}$, $\tau=-\frac{ba'}{a^2+b^2}$, $\frac{\tau}{k}=\frac{-b}{a}$. 9. $a=\pm\frac{2}{3}b^2$. 当 $a=\frac{2}{3}b^2$ 时，$\boldsymbol{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\{1,\ 0,\ 1\}$；当 $a=-\frac{2}{3}b^2$ 时，$\boldsymbol{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\{-1,0,1\}$. 13. 提示：注意曲线 C：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率中心轨迹为 C^*：$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+R(s)\boldsymbol{N}(s)$.

习题六 4. 设 $\boldsymbol{\Omega}=\alpha\boldsymbol{T}+\beta\boldsymbol{N}+\gamma\boldsymbol{B}$，代入方程组，求得 $\boldsymbol{\Omega}=\tau\boldsymbol{T}+k\boldsymbol{B}$.
5. $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}=-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B}$, $\frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4}=-3kk'\boldsymbol{T}+(k''-k^3-k\tau^2)\boldsymbol{N}+(k\tau'+2k'\tau)\boldsymbol{B}$. 6. 提示：证明曲线的所有法平面通过定点，该定点在

题(1)是原点，(2) 是$\{-1, 0, 0\}$． **8**．提示：(1) 几何条件为 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}=r$；(2) 几何条件为 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}=r$，设 $\boldsymbol{r}=\alpha\boldsymbol{T}+\beta\boldsymbol{N}+\gamma\boldsymbol{B}$，根据条件决定系数 α, β, γ． **9**．提示：设 $\boldsymbol{r}=\alpha\boldsymbol{T}+\beta\boldsymbol{N}+\gamma\boldsymbol{B}$，决定系数 $\alpha=0$，$\beta=-R$，$\gamma=\dfrac{-R'}{\tau}$．

习题八 **1**．提示：(1) 证明$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}', \boldsymbol{N}'')=k^2\left(\dfrac{\tau}{k}\right)'$；

(2) 证明 $(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}^{(4)})=(\boldsymbol{T}', \boldsymbol{T}'', \boldsymbol{T}''')=k^5\left(\dfrac{\tau}{k}\right)'$．

2．提示：证明 $k=\dfrac{a}{c}\theta'$，$\tau=-\dfrac{b}{c}\theta'$，$\dfrac{\tau}{k}=-\dfrac{b}{a}$．

3．提示：证明 $k^*=k=\tau=\tau^*$．

4．提示：$k=\dfrac{|(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}', \boldsymbol{g}'')|}{a}\neq 0$，$\tau=\dfrac{a^3(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}', \boldsymbol{g}'')^2}{a^4(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}', \boldsymbol{g}'')^2}=\dfrac{1}{a}$．

5．提示：$\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{B}\times\left(-\dfrac{1}{\tau}\boldsymbol{B}'\right)=a\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}'$，$\boldsymbol{r}=a\displaystyle\int\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}'ds$，

式中 $|\boldsymbol{B}(s)|=1$，$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}', \boldsymbol{B}'')=\dfrac{k}{a^2}\neq 0$．

习题九 **2**．(1) $\dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$； (2) $\dfrac{-ab}{(a^2\operatorname{sh}^2 t+b^2\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}$；
(3) $\dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$； (4) $\dfrac{1}{a\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}}$； (5) $-\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{a}$； (6) $\dfrac{1}{c\sqrt{1+a^2}e^{a\varphi}}$；
(7) $\dfrac{2}{3a\sin 2t}$．

习题十 **1**．(1) $k_r=\dfrac{-1}{\sqrt{16a^2-s^2}}$； (2) $k_r=\dfrac{a}{a^2+s^2}$； (3) $k_r=\dfrac{1}{as}$．

2．(1) 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$； (2) 旋轮线 $\boldsymbol{r}=\dfrac{a}{4}\{t+\sin t, 1-\cos t\}(t=2\theta)$；(3) 在适当选取的极坐标系中，曲线形式为 $\rho=ce^{a\theta}$，是对数螺线；(4) 圆的渐伸线 $\boldsymbol{r}=a\{\cos\theta+\theta\sin\theta, \sin\theta-\theta\cos\theta\}$．

习题十一 **1**．$x=\left(a+\dfrac{br}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\right)\cos\theta$，

$y=\left(b+\dfrac{ar}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\right)\sin\theta$．

2．(1) $x=p\cos\theta-p'\sin\theta$， $y=p\sin\theta+p'\cos\theta$．

4．$\boldsymbol{r}=\left\{\alpha\operatorname{ch}t-\dfrac{a\beta\operatorname{ch}t}{\sqrt{\alpha^2\operatorname{sh}^2 t+\beta^2\operatorname{ch}^2 t}}, \beta\operatorname{sh}t+\dfrac{a\alpha\operatorname{sh}t}{\sqrt{\alpha^2\operatorname{sh}^2 t+\beta^2\operatorname{ch}^2 t}}\right\}$．

5. C^*: $\boldsymbol{r}=\left\{\left(\alpha-\dfrac{a\beta}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta}}\right)\cos\theta,\right.$
$\left.\left(\beta-\dfrac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta}}\right)\sin\theta\right\}$,
当 $\alpha=\beta=R$ 时，$\boldsymbol{r}=(R-a)\{\cos\theta,\ \sin\theta\}$.

习题十二 6. 提示：C 与 C^* 是对等的. 若某关系式对 C 成立，作如表所示的上下行对换：$\begin{pmatrix} s & k & \tau & \lambda & \theta \\ s^* & k^* & \tau^* & -\varepsilon\lambda & -\varepsilon\theta \end{pmatrix}$，则关系式对 C^* 也成立. 曲线 C 的关系式 $\dfrac{ds^*}{ds}=\dfrac{\lambda\tau}{\sin\theta}$，对换后成为 $\dfrac{ds}{ds^*}=\dfrac{-\varepsilon\lambda\tau^*}{-\varepsilon\sin\theta}=\dfrac{\lambda\tau^*}{\sin\theta}$. 两式的两边分别相乘，得到 $\tau\tau^*=\dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$.

习题十三 2. 提示：利用题 1(3). 5. (1) 半立方抛物线 $\dfrac{27p^2}{2}x^2=(2py-1)^3$; (2) 旋轮线 $\boldsymbol{r}^*=\{a(t+\sin t),\ -a(1-\cos t)\}$.

第　二　章

习题一 2. (1) $-\cos\varphi\{\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\}$;
(2) $-abc\cos\varphi\left\{\dfrac{1}{a}\cos\varphi\cos\theta,\ \dfrac{1}{b}\cos\varphi\sin\theta,\ \dfrac{1}{c}\sin\varphi\right\}$;
(3) $\{cv\cos u,\ cv\sin u,\ -v\}$;　(4) $a\{\cos u,\ \sin u,\ 0\}$;
(5) $\left\{-\dfrac{u}{a^2},\ -\dfrac{v}{b^2},\ 1\right\}$;　(6) $\{2b(u+v),\ -2a(u-v),\ -(a^2+b^2)\}$;
(7) $\operatorname{ch}u\{-bc(\operatorname{ch}u\cos v),\ -ac(\operatorname{ch}u\sin v),\ ab(\operatorname{sh}u)\}$;
(8) $\operatorname{sh}u\{bc(\operatorname{ch}u),\ -ac(\operatorname{sh}u\cos v),\ -ab(\operatorname{sh}u\sin v)\}$.

习题二 1. $\{-f_x,\ -f_y,\ 1\}$. 2. $\left\{0,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $y+z-1=0$.
3. $\boldsymbol{r}=\{-t\cos\omega\cos u,\ -t\cos\omega\sin u,\ t\sin\omega+bu\}$.

习题三 1. (1) 准线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)=\{a\cos u,\ b\sin u,\ 0\}$, $\boldsymbol{l}(u)=\dot{\boldsymbol{a}}(u)+c\boldsymbol{k}$; (2) 准线 C 是 z 轴：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)=\{u,\ 0,\ 0\}$, $\boldsymbol{l}(u)=\left\{0,\ \dfrac{1}{h},\ u\right\}$.
2. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2v^2}}\{\cos u-v\sin u,\ \sin u+v\cos u,\ v\}$;
(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\{-v,\ -u,\ 1\}$;
(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+(v\theta')^2}}\{-\sin\theta,\ \cos\theta,\ -v\theta'\}$.

习题四 1. (1) $\boldsymbol{a}(u)=\{au, bu, 0\}$, $\boldsymbol{l}(u)=\{a, -b, 2u\}$, $(\dot{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{l}, \dot{\boldsymbol{l}})=-4ab\neq 0$; (2) $\boldsymbol{a}(u)=\{0, 0, bu\}$, $\boldsymbol{l}(u)=\{\cos u, \sin u, 0\}$, $(\dot{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{l}, \dot{\boldsymbol{l}})=b\neq 0$. 2. $\boldsymbol{a}(u)=\{u^2, 2u^3, u^4\}$, $\boldsymbol{l}(u)=\left\{\frac{1}{3}, u, \frac{2}{3}u^2\right\}$, $(\dot{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{l}, \dot{\boldsymbol{l}})=0$.
3. 提示: 作参数变换 $u=u$, $t=u-v$, 曲面方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(v)+t\boldsymbol{l}(v)$, 式中 $\boldsymbol{a}(v)=\{\cos v, \sin v, v\}$, $\boldsymbol{l}(v)=\{-\sin v, \cos v, 1\}=\dot{\boldsymbol{a}}$, $(\dot{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{l}, \dot{\boldsymbol{l}})=(\dot{\boldsymbol{a}}, \dot{\boldsymbol{a}}, \ddot{\boldsymbol{a}})=0$.

习题五 1. (1) $ds^2=a^2du^2+dv^2$; (2) $ds^2=v^2du^2+dv^2$;
(3) $ds^2=(f^2+b^2)du^2-2bg'du\,dv+(f'^2+g'^2)dv^2$;
(4) $ds^2=\mathrm{ch}^2\frac{v}{a}(a^2du^2+dv^2)$; (5) $ds^2=a^2\sin^2 v\,du^2+a^2\operatorname{ctg}^2 v\,dv^2$;
(6) $ds^2=(a^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi)d\varphi^2+a^2\cos^2\varphi\,d\theta^2$;
(7) $ds^2=(a^2\mathrm{sh}^2 u+c^2\mathrm{ch}^2 u)du^2+a^2\mathrm{ch}^2 u\,dv^2$;
(8) $ds^2=(a^2\mathrm{sh}^2 u+b^2\mathrm{ch}^2 u)du^2+b^2\mathrm{sh}^2 u\,dv^2$;
(9) $ds^2=\left(1+\frac{u^2}{a^4}\right)du^2+\frac{2uv}{a^2b^2}du\,dv+\left(1+\frac{v^2}{b^4}\right)dv^2$;
(10) $ds^2=(a^2+b^2+4v^2)du^2-2(a^2-b^2+4uv)du\,dv+(a^2+b^2+4u^2)dv^2$;
(11) $ds^2=(v^2+\varphi'^2)du^2+dv^2$;
(12) $ds^2=(1+f_x^2)dx^2+2f_xf_y\,dx\,dy+(1+f_y^2)dy^2$;
(13) $ds^2=\dot{\boldsymbol{a}}^2du^2+2\dot{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{l}\,du\,dv+dv^2$; (14) $ds^2=v^2\boldsymbol{l}^2du^2+dv^2$;
(15) $ds^2=(1+v^2k^2)du^2+2du\,dv+dv^2$ (k 是脊线的曲率);
(16) $ds^2=a^2\cos^2\varphi\,d\theta^2+a^2d\varphi^2$; (17) $ds^2=(v^2+b^2)du^2+dv^2$;
(18) $ds^2=f^2du^2+(f'^2+g'^2)dv^2$; (19) $ds^2=(a+r\cos v)^2du^2+r^2dv^2$.
2. $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$. 3. $\cos\theta=\frac{a^2-1}{a^2-1}$. 4. $A=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$.
5. $4\pi^2ar$.

习题六 (1) $\mathrm{II}=-a\,du^2$; (2) $\mathrm{II}=a\cos^2\varphi\,d\theta^2+a\,d\varphi^2$;
(3) $\mathrm{II}=\frac{2b}{\sqrt{b^2+v^2}}du\,dv$; (4) $\mathrm{II}=-a\,du^2+\frac{1}{a}dv^2$;
(5) $\mathrm{II}=\cos v(a+r\cos v)du^2+r\,dv^2$;
(6) $\mathrm{II}=\frac{4ab}{\sqrt{a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2+a^2b^2}}du\,dv$;
(7) $\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2)$, 式中记 $p=f_x$, $q=f_y$,

$r=f_{xx}$, $s=f_{xy}$, $t=f_{yy}$.

习题七 **1**. 等于 $2H$. **5**. $K=\frac{-1}{(1+2v^2)^2}$, $H=\frac{1+v^2}{(1+2v^2)^{3/2}}$. **11**. $K=\frac{18u^3v^3}{(EG-F^2)^2}$, 抛物曲线是 $u=0$ 或 $v=0$. **12**. 提示: v 是曲线 C 的弧长, 有 $f'^2+g'^2=1$ 和 $f'f''+g'g''=0$ 成立. **13**. 提示: 在拐点处 $f'g''-f''g'=0$, 在垂直于对称轴的切线的切点处 $g'=0$, 按照(4.30)式, $K=0$. **14**. $\ln(v+\sqrt{b^2+v^2})=\pm u+c$ (c 是积分常数).

15. 曲率线微分方程为 $\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix}=0$.

习题八 **1**. (1) 提示: 由 $\sum_j g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$, 取 $i=k$ 并从 1 到 2 作和; (2) 提示: 将(5.2)代入公式右端直接计算. **3**. $\omega_1^1=\frac{1}{g}(MF-LG)$, $\omega_1^2=\frac{1}{g}(LF-ME)$, $\omega_2^1=\frac{1}{g}(NF-MG)$, $\omega_2^2=\frac{1}{g}(MF-NE)$, 式中 $g=EG-F^2$. **4**. $\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2g}[GE_1-F(2F_1-E_2)]$, $\Gamma_{11}^2=\frac{1}{2g}[E(2F_1-E_2)-FE_1]$, $\Gamma_{12}^1=\frac{1}{2g}(GE_2-FG_1)$, $\Gamma_{12}^2=\frac{1}{2g}(EG_1-FE_2)$, $\Gamma_{22}^1=\frac{1}{2g}[G(2F_2-G_1)-FG_2]$, $\Gamma_{22}^2=\frac{1}{2g}[EG_2-F(2F_2-G_1)]$. **5**. 提示: 利用第 4 题. **6**. (2) 提示: 对 $\sum_m g^{im}g_{mj}=\delta_j^i$ 两边关于 u^k 求导, 再利用本题(1). **9**. (1) $K=a$; (2) $K=-\frac{1}{a^2}$; (3) $K=-\frac{1}{a^2}$; (4) $K=-\frac{1}{a^2}$.

习题九 **3**. $u=c\int\frac{dv}{\sqrt{(v^2+b^2)(v^2+b^2-c^2)}}+D$ (本题和第 4 题中的 C、D 都是积分常数). **4**. (1) $v=c\int\frac{du}{\sqrt{\rho^2(u)-c^2}}+D$; (2) $v=\frac{1}{4c^2}(u-D)^2+c^2$. **5**. (1) $\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{11}^2=0$, $\Gamma_{22}^1=\frac{-G_1}{2}$, $\Gamma_{12}^2=\frac{G_1}{2G}$, $\Gamma_{22}^2=\frac{G_2}{2G}$; (2) 提示: 由(6.15)式, 沿 u 曲线 $k_{g_1}=0$; (3) $K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$; (4) 提示: 将(6.23)式中两式的两边分别相除.

习题十 **3**. 椭圆点、双曲点、抛物点是等距不变的, 脐点则不是. **4**. 提

示：球面 $K>0$，柱面 $K=0$，单叶双曲面 $K<0$.

习题十一 **1**. 只能是平面、圆柱面或圆锥面. 证明方法是：先计算旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)\}$ 的高斯曲率 K，再讨论 $K=0$ 的条件. **2**. 提示：$E=v^2+\varphi'^2$，$F=0$，$G=1$，$L=\frac{v\varphi''}{\sqrt{v^2+\varphi'^2}}$，$N=0$，$GL-2FM+EN=\frac{v\varphi''}{\sqrt{v^2+\varphi'^2}}=0$. 从 $\varphi''=0$ 导得 $\varphi=au+b$，所以曲面是正螺面.